abc – ГИПОТЕЗА

Logman Shihaliiev

Born on 1960.08.10. A simple citizen.

«ORBĪTA TECHNOLOGY» LTD (auditor), «KOMMERSANT T. A» (engineer)

logman1@list.ru

+994505149553

ORCID: 0000-0003-1063-4712

ABSTRACT. Предметом этой статьи является исследование *abc*-гипотезы. Актуальность исследуемой проблемы заключается в том, что она является одной из нерешенных проблем теории чисел [1]. Цель статьи – подтвердить *abc*- гипотезу.

KEY WORDS. *abc* conjecture; Number theory.

CLASSIFICATION NUMBERS: MSC: 11A99

ВВЕДЕНИЕ

В этой статье доказываются две леммы и теорема.

ЛЕММА 1. Для любого натурального числа w существует только конечное число троек a, b, c взаимно простых натуральных чисел, таких, как $a + b = c$ и выполняется следующее неравенство

$$c > rad(abc),$$

где $rad(abc) = rad(w)$

ЛЕММА 2. Как следствие Леммы 1 становится очевидно, что так же для любого действительного положительного числа ε существует только конечное число троек a, b, c взаимно простых натуральных чисел, таких, как $a + b = c$ и выполняется следующее неравенство

$$c > rad(abc)^{1+\varepsilon}$$

ТЕОРЕМА. Для каждого положительного действительного числа ε существует постоянная $K(\varepsilon)$, такая, что для любой тройки взаимно простых

положительных целых чисел a, b, c таких, как $a + b = c$ верно следующее неравенство

$$c < K(\varepsilon) \cdot rad(abc)^{1+\varepsilon}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВА.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1. Докажем, что для любого натурального числа w существует только конечное число троек a, b, c взаимно простых натуральных чисел, таких, как $a + b = c$ и выполняется следующее неравенство

$$c > rad(abc). \quad (1)$$

$$\text{Здесь и во всей статье } rad(abc) = rad(w) = const \quad (2)$$

w – произвольное взятое натуральное число.

Предположим, что существует бесконечное число троек a, b, c . Для чисел (a, b, c) запишем:

$$\begin{cases} a = \alpha + k_a \cdot rad(abc) \\ b = \beta + k_b \cdot rad(abc) \\ c = \gamma + k_c \cdot rad(abc) \end{cases} \quad (3)$$

Здесь $\alpha, \beta, \gamma, k_a, k_b, k_c$ натуральные числа и

$$0 < \alpha < rad(abc), \quad 0 < \beta < rad(abc), \quad 0 < \gamma < rad(abc) \quad (4)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Очевидно, что, если $c = \gamma + k_c \cdot rad(abc)$, то $c > rad(abc)$.

Из (3) очевидно, что

$$\begin{cases} rad(abc) \equiv 0 \pmod{rad(a)} \Rightarrow rad(\alpha) \equiv 0 \pmod{rad(a)} \Rightarrow rad(\alpha) \geq rad(a) \\ rad(abc) \equiv 0 \pmod{rad(b)} \Rightarrow rad(\beta) \equiv 0 \pmod{rad(b)} \Rightarrow rad(\beta) \geq rad(b) \\ rad(abc) \equiv 0 \pmod{rad(c)} \Rightarrow rad(\gamma) \equiv 0 \pmod{rad(c)} \Rightarrow rad(\gamma) \geq rad(c) \end{cases} \quad (5)$$

где учитываем, что $\alpha \cdot \beta \cdot \gamma \neq 0$, так как a, b, c взаимно простые числа.

Из (5) получаем

$$rad(\alpha\beta\gamma) \geq rad(abc) \quad \text{и} \quad rad(\alpha\beta\gamma) \equiv 0 \pmod{rad(abc)} \quad (6)$$

Числа a, b, c запишем так (каноническое разложение числа):

$$\begin{cases} a = a_1^{\alpha_1} \cdot a_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot a_i^{\alpha_i} \\ b = b_1^{\beta_1} \cdot b_2^{\beta_2} \cdot \dots \cdot b_j^{\beta_j} \\ c = c_1^{\gamma_1} \cdot c_2^{\gamma_2} \cdot \dots \cdot c_k^{\gamma_k} \end{cases} \quad (7)$$

где $a_1, a_2, \dots, a_i, b_1, b_2, \dots, b_j, c_1, c_2, \dots, c_k$ – разные простые числа,

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_j, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k$ – натуральные числа.

Следовательно

$$rad(a) = a_1 \cdot \dots \cdot a_i \quad rad(b) = b_1 \cdot \dots \cdot b_j \quad rad(c) = c_1 \cdot \dots \cdot c_k$$

Далее, для α, β, γ с учетом (5) и (6) запишем

$$\begin{cases} rad(\alpha) = rad(\partial_\alpha) \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_i \\ rad(\beta) = rad(\partial_\beta) \cdot b_1 \cdot b_2 \cdot \dots \cdot b_j \\ rad(\gamma) = rad(\partial_\gamma) \cdot c_1 \cdot c_2 \cdot \dots \cdot c_k \end{cases} \quad (8)$$

где $\partial_\alpha, \partial_\beta, \partial_\gamma$ – натуральные числа, и $(a, \partial_\alpha) = 1, (b, \partial_\beta) = 1, (c, \partial_\gamma) = 1$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если $rad(\alpha) = rad(a)$, то $\partial_\alpha = 1$, если $rad(\beta) = rad(b)$, то $\partial_\beta = 1$ и если $rad(\gamma) = rad(c)$, то $\partial_\gamma = 1$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. По условиям проблемы значения чисел a, b, c меняются (увеличиваются), а $rad(abc) = const$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Множество разных троек чисел α, β, γ ограничено, так как $\alpha, \beta, \gamma < rad(abc) = const$.

С учетом $a + b = c$ запишем

$$\begin{aligned} a_1^{\alpha_1} \cdot a_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot a_i^{\alpha_i} + b_1^{\beta_1} \cdot b_2^{\beta_2} \cdot \dots \cdot b_j^{\beta_j} &= c_1^{\gamma_1} \cdot c_2^{\gamma_2} \cdot \dots \cdot c_k^{\gamma_k} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{a_1^{\alpha_1} \cdot a_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot a_i^{\alpha_i}}{c_1^{\gamma_1} \cdot c_2^{\gamma_2} \cdot \dots \cdot c_k^{\gamma_k}} + \frac{b_1^{\beta_1} \cdot b_2^{\beta_2} \cdot \dots \cdot b_j^{\beta_j}}{c_1^{\gamma_1} \cdot c_2^{\gamma_2} \cdot \dots \cdot c_k^{\gamma_k}} &= 1 \end{aligned} \quad (9)$$

Слагаемые на левой стороне равенства (9) запишем в виде формул числовых последовательностей:

$$0 < A(n) = \frac{a_1^{\alpha_1} \cdot a_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot a_i^{\alpha_i}}{c_1^{\gamma_1} \cdot c_2^{\gamma_2} \cdot \dots \cdot c_k^{\gamma_k}} < 1, \quad 0 < B(n) = \frac{b_1^{\beta_1} \cdot b_2^{\beta_2} \cdot \dots \cdot b_j^{\beta_j}}{c_1^{\gamma_1} \cdot c_2^{\gamma_2} \cdot \dots \cdot c_k^{\gamma_k}} < 1 \quad (10)$$

Здесь $n = \{1, 2, 3, \dots\}$. Предположим, что $a \rightarrow +\infty, b \rightarrow +\infty, c \rightarrow +\infty$.

Значения чисел a, b, c растут за счет роста степеней $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_j, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k)$. При этом может быть так, что значения некоторых степеней останутся ограниченными (не стремятся к бесконечности), и при этом формируются дроби $\frac{P_a}{P_c}$ и $\frac{P_b}{P_c}$. То есть

$$\begin{cases} a_1^{\alpha_1} \cdot a_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot a_i^{\alpha_i} = a_{01}^{\alpha_{01}} \cdot a_{02}^{\alpha_{02}} \cdot \dots \cdot a_{0w}^{\alpha_{0w}} \cdot a_{11}^{\alpha_{11}} \cdot a_{12}^{\alpha_{12}} \cdot \dots \cdot a_{1v}^{\alpha_{1v}} \\ b_1^{\beta_1} \cdot b_2^{\beta_2} \cdot \dots \cdot b_j^{\beta_j} = b_{01}^{\beta_{01}} \cdot b_{02}^{\beta_{02}} \cdot \dots \cdot b_{0d}^{\beta_{0d}} \cdot b_{11}^{\beta_{11}} \cdot b_{12}^{\beta_{12}} \cdot \dots \cdot b_{1t}^{\beta_{1t}} \\ c_1^{\gamma_1} \cdot c_2^{\gamma_2} \cdot \dots \cdot c_k^{\gamma_k} = c_{01}^{\gamma_{01}} \cdot c_{02}^{\gamma_{02}} \cdot \dots \cdot c_{0m}^{\gamma_{0m}} \cdot c_{11}^{\gamma_{11}} \cdot c_{12}^{\gamma_{12}} \cdot \dots \cdot c_{1n}^{\gamma_{1n}} \end{cases} \quad (11)$$

Здесь

$$\begin{cases} w + v = i \\ d + t = j \\ m + n = k \end{cases} \quad (12)$$

$$\begin{cases} \{a_1^{\alpha_1}, a_2^{\alpha_2}, \dots, a_i^{\alpha_i}\} = \{a_{01}^{\alpha_{01}}, a_{02}^{\alpha_{02}}, \dots, a_{0w}^{\alpha_{0w}}\} \cup \{a_{11}^{\alpha_{11}}, a_{12}^{\alpha_{12}}, \dots, a_{1v}^{\alpha_{1v}}\} \\ \{b_1^{\beta_1}, b_2^{\beta_2}, \dots, b_j^{\beta_j}\} = \{b_{01}^{\beta_{01}}, b_{02}^{\beta_{02}}, \dots, b_{0d}^{\beta_{0d}}\} \cup \{b_{11}^{\beta_{11}}, b_{12}^{\beta_{12}}, \dots, b_{1t}^{\beta_{1t}}\} \\ \{c_1^{\gamma_1}, c_2^{\gamma_2}, \dots, c_k^{\gamma_k}\} = \{c_{01}^{\gamma_{01}}, c_{02}^{\gamma_{02}}, \dots, c_{0m}^{\gamma_{0m}}\} \cup \{c_{11}^{\gamma_{11}}, c_{12}^{\gamma_{12}}, \dots, c_{1n}^{\gamma_{1n}}\} \end{cases} \quad (13)$$

$$\begin{cases} a_{01}^{\alpha_{01}} \cdot a_{02}^{\alpha_{02}} \cdot \dots \cdot a_{0w}^{\alpha_{0w}} = P_a & \begin{cases} a_{11}^{\alpha_{11}} \cdot a_{12}^{\alpha_{12}} \cdot \dots \cdot a_{1v}^{\alpha_{1v}} = M_a^{f(\alpha)} \\ b_{11}^{\beta_{11}} \cdot b_{12}^{\beta_{12}} \cdot \dots \cdot b_{1t}^{\beta_{1t}} = M_b^{f(\beta)} \\ c_{11}^{\gamma_{11}} \cdot c_{12}^{\gamma_{12}} \cdot \dots \cdot c_{1n}^{\gamma_{1n}} = M_c^{f(\gamma)} \end{cases} \\ b_{01}^{\beta_{01}} \cdot b_{02}^{\beta_{02}} \cdot \dots \cdot b_{0d}^{\beta_{0d}} = P_b \\ c_{01}^{\gamma_{01}} \cdot c_{02}^{\gamma_{02}} \cdot \dots \cdot c_{0m}^{\gamma_{0m}} = P_c \end{cases} \quad (14)$$

$$\begin{cases} a_1^{\alpha_1} \cdot a_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot a_i^{\alpha_i} = P_a \cdot M_a^{f(\alpha)} \\ b_1^{\beta_1} \cdot b_2^{\beta_2} \cdot \dots \cdot b_j^{\beta_j} = P_b \cdot M_b^{f(\beta)} \\ c_1^{\gamma_1} \cdot c_2^{\gamma_2} \cdot \dots \cdot c_k^{\gamma_k} = P_c \cdot M_c^{f(\gamma)} \end{cases} \quad (15)$$

Равенство (9) запишем так

$$\frac{P_a \cdot M_a^{f(\alpha)}}{P_c \cdot M_c^{f(\gamma)}} + \frac{P_b \cdot M_b^{f(\beta)}}{P_c \cdot M_c^{f(\gamma)}} = 1 \Rightarrow \frac{P_a}{P_c} \cdot \frac{M_a^{f(\alpha)}}{M_c^{f(\gamma)}} + \frac{P_b}{P_c} \cdot \frac{M_b^{f(\beta)}}{M_c^{f(\gamma)}} = 1 \quad (16)$$

Если $P_a M_a^{f(\alpha)} \rightarrow +\infty, P_b \cdot M_b^{f(\beta)} \rightarrow +\infty, P_c \cdot M_c^{f(\gamma)} \rightarrow +\infty$, то с учетом (9) и (16) $f(\alpha), f(\beta), f(\gamma)$ бесконечно большие функции одинакового порядка. При этом заметим, что $P_a, M_a, P_b, M_b, P_c, M_c$ сверху ограниченные числа.

Уточним, что:

M_a – произведение тех простых делителей числа a , у которых степени стремятся к бесконечности;

M_b – произведение тех простых делителей числа b , у которых степени стремятся к бесконечности;

M_c – произведение тех простых делителей числа c , у которых степени стремятся к бесконечности.

P_a, P_b, P_c – расшифровка этих компонентов есть в (14).

Для (16) проанализируем четыре возможных варианта:

1. Так как числа a, b, c взаимно простые, то $\frac{M_a}{M_c} \neq 1, \frac{M_b}{M_c} \neq 1$;
2. Если $\frac{M_a}{M_c} > 1$ и/или $\frac{M_b}{M_c} > 1$, то левые стороны равенств (16) и (9) стремятся к бесконечности;
3. Если $\frac{M_a}{M_c} < 1$ и/или $\frac{M_b}{M_c} < 1$, то левые стороны равенств (16) и (9) стремятся к нулю.
4. Можно предположить, что

$$\begin{cases} a_1^{\alpha_1} \cdot a_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot a_i^{\alpha_i} = (F(a))^{g(c)} \\ b_1^{\beta_1} \cdot b_2^{\beta_2} \cdot \dots \cdot b_j^{\beta_j} = (H(b))^{g(c)} \\ c_1^{\gamma_1} \cdot c_2^{\gamma_2} \cdot \dots \cdot c_k^{\gamma_k} = (g(c))^{g(c)} \end{cases} \quad (17)$$

где $F(a), H(b), g(c)$, бесконечно большие функции одного и того же порядка, и $g(c) > F(a), g(c) > H(b)$ (18)

В таком случае (9) запишем так

$$\frac{a_1^{\alpha_1} \cdot a_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot a_i^{\alpha_i}}{c_1^{\gamma_1} \cdot c_2^{\gamma_2} \cdot \dots \cdot c_k^{\gamma_k}} + \frac{b_1^{\beta_1} \cdot b_2^{\beta_2} \cdot \dots \cdot b_j^{\beta_j}}{c_1^{\gamma_1} \cdot c_2^{\gamma_2} \cdot \dots \cdot c_k^{\gamma_k}} = 1 \Rightarrow \frac{(F(a))^{g(c)}}{(g(c))^{g(c)}} + \frac{(H(b))^{g(c)}}{(g(c))^{g(c)}} = 1 \quad (19)$$

С учетом (19)

$$\begin{aligned} \frac{(F(a))^{g(c)}}{(g(c))^{g(c)}} &\leq \frac{(g(c)-1)^{g(c)}}{(g(c))^{g(c)}} = \left(\frac{g(c)-1}{g(c)}\right)^{g(c)} = \\ &= \left(1 - \frac{1}{g(c)}\right)^{g(c)} \Rightarrow \lim_{g(c) \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{g(c)}\right)^{g(c)} = \frac{1}{e} < \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \frac{(H(b))^{g(c)}}{(g(c))^{g(c)}} &\leq \frac{(g(c)-1)^{g(c)}}{(g(c))^{g(c)}} = \left(\frac{g(c)-1}{g(c)}\right)^{g(c)} = \\ &= \left(1 - \frac{1}{g(c)}\right)^{g(c)} \Rightarrow \lim_{g(c) \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{g(c)}\right)^{g(c)} = \frac{1}{e} < \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (21)$$

(20) и (21) противоречат (19) и (9)

$$\frac{(F(a))^{g(c)}}{(g(c))^{g(c)}} + \frac{(H(b))^{g(c)}}{(g(c))^{g(c)}} < \frac{1}{e} + \frac{1}{e} < 1 \quad (22)$$

Все четыре варианта анализа равенства (16) подтверждают, что для любого натурального числа w значение числа c (и количество таких чисел), заданного условиями (1) и (2) ограничены. Значит, существует число C такое, что

$$C > c > rad(abc) \quad (23)$$

Лемма 1 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2. Докажем, что для любого действительного положительного числа ε существует только конечное число троек a, b, c взаимно простых натуральных чисел, таких, как $a + b = c$ и выполняется следующее неравенство

$$c > rad(abc)^{1+\varepsilon} \quad (24)$$

Очевидно, что появление в (1) любого действительного положительного числа ε (как это указано в (24)) усиливает лемму 1, и уменьшает значение числа c , и справедливо

$$C > c > rad(abc)^{1+\varepsilon} \quad (25)$$

Лемма 2 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Если $C > c > rad(abc)^{1+\varepsilon}$, то это означает, что существует число μ , для которого выполняется условие

$$c = \mu rad(abc)^{1+\varepsilon} \quad (26)$$

Становится очевидно, что для любого действительного положительного числа ε существует постоянная $K(\varepsilon) > \mu$, такая, что для любой тройки взаимно простых положительных целых чисел a, b, c таких, как $a + b = c$ верно следующее неравенство

$$c < K(\varepsilon) \cdot rad(abc)^{1+\varepsilon} \quad (27)$$

Теорема доказана.

abc – ГИПОТЕЗА верно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.

1. https://en.wikipedia.org/wiki/Abc_conjecture