

Отзыв на статью Л.А. Шыхалиева «Решения гипотез Брокада и Лежандра»

Статья Л. А. Шыхалиева «Решения гипотез Брокада и Лежандра» посвящена доказательству ряда утверждений, относящихся к теории распределения простых чисел. В частности, автор доказывает существование простого числа в любом промежутке вида $(p_n^2 - p_n, p_n^2)$ (здесь и далее $p_1 = 2, p_2 = 3, \dots, p_n, \dots$ - занумерованные в порядке возрастания простые числа). Отметим, что последнее утверждение не следует даже из гипотезы Римана.

В своем исследовании автор рассматривает следующий вариант решета Эратосфена. Именно, зафиксировав простое число p_n , все натуральные числа от 1 до p_n^2 он записывает в виде квадратной таблицы размера $p_n \times p_n$, после чего из строк таблицы последовательно вычеркивает числа, кратные $p_1, p_2, \dots, p_n$ (включая сами эти простые числа). Каждое число вычеркивается ровно один раз, т.е. если число было вычеркнуто ранее, повторно оно уже не вычеркивается (стр. 4, абз. 9). Оставшиеся невычеркнутыми после такой процедуры числа таблицы будут, очевидно, простыми числами, лежащими между p_n и p_n^2 . Далее автор замечает, что при вычеркивании в первой строке всегда остается ровно одно невычеркнутое число - единица. Основное утверждение автора статьи состоит в том, что и в любой другой строке таблицы также найдется хотя бы одно невычеркнутое (и, следовательно, простое) число. В частности, такое простое число p имеется и в последней строке, так что для него справедливы неравенства $p_n(p_n - 1) < p < p_n^2$.

Публикация данной работы не представляется возможной по следующим причинам. Автор в статье доказывает совсем другое утверждение, из которого заявленный результат не следует.

Поясним сказанное подробнее. Пусть $2 \leq q \leq p_n$ - произвольное простое число. Если $M_1 = [p_n/q]$ - количество чисел первой строки таблицы, кратных q , то число M_s чисел s -й строки, кратных q , равно M_1 либо $M_1 + 1$ (что очень путанно доказывается в леммах 1 и 2 статьи).

В теореме 1 доказывается, что если для заданного простого числа q в некоторой строке имеется $M_1 + 1$ чисел, кратных q (т.е. на одно больше, чем в первой), то это одно «лишнее» число обязательно было вычеркнуто ранее, на предыдущих шагах.

Однако в действительности нужно доказывать совсем другое утверждение. Вычеркнув из таблицы числа, кратные p_n , а также кратные $p_1, p_2, \dots, p_{s-1}$ ($2 \leq s \leq n - 1$), рассмотрим невычеркнутые числа первой строки, кратные p_s . Пусть их число равно $m_1 = m_1(p_s)$. Возьмем произвольную строку (пусть k - её номер) и рассмотрим в ней все невычеркнутые числа, кратные p_s . Их число равно $m_k(p_s)$. Доказывать же нужно тот факт, что для любых рассматриваемых s и k имеет место неравенство: $m_k(p_s) \leq m_1(p_s)$. Именно этот факт в работе не доказан.

Рецензия (вторая) на статью Л. А. Шыхалиева «Решения гипотез Броккарда и Лежандра»

Статья не может быть опубликована в каком-либо математическом журнале, так как она изобилует множеством погрешностей, а доказательство основного утверждения статьи содержит принципиальную ошибку. Перечислим недостатки статьи по порядку.

0°. Гипотезы не «решают», а доказывают либо опровергают. Далее, вместо того, чтобы ознакомиться со свойствами целой части числа, на что было неявно указано в первой рецензии, автор продолжает долго и путанно доказывать тривиальные утверждения на нескольких страницах, в то время как введение функции $[\cdot]$ позволило бы ему сократить доказательство нескольких утверждений до одной-двух строк.

1°. Многие термины, употребляемые автором, некорректны и допускают неоднозначное толкование, поскольку не даны их чёткие определения.

Например, до конца так и не ясен смысл термина «погашение». Так, в квадратной таблице, отвечающей $p_n = p_4 = 7$ чётные строки содержат $M_1 + 1 = 4$ числа, кратных $p_1 = 2$, а именно:

1-я строка: 8, 10, 12, 14;
2-я строка: 22, 24, 26, 28;
3-я строка: 36, 38, 40, 42.

Автор, по сути, утверждает, что увеличение («погашение») на 1 (по сравнению с нечётными строками таблицы, содержащими только по 3 чётных числа) произошло за счёт появления в приведённых строках чётных чисел, кратных $p_4 = 7$, т.е. 14, 28 и 42. Но с тем же успехом можно утверждать, что это происходит за счёт появления в строках чётных чисел, кратных $p_2 = 3$, т.е. 12, 24 и 36.

2°. Простые числа, встречающиеся в первой строке таблицы, автор делит на два класса, один из которых называет «проблемным». Именно, простое число $q < p_n$ названо проблемным, если в таблице найдётся такая строка, количество чисел которой, кратных q , на единицу превысит количество чисел, кратных q , в первой строке (легко видеть, что превышение более чем на 1 невозможно). Однако несложно показать, что все простые числа первой строки (кроме p_n) в действительности являются проблемными.

Итак, пусть $q < p = p_n$ – простое, и пусть $M_k(q)$ обозначает количество чисел k -й строки, кратных q . Тогда имеем, очевидно:

$$M_1(q) = \left[\frac{p}{q} \right], \quad M_k(q) = \left[\frac{kp}{q} \right] - \left[\frac{(k-1)q}{p} \right].$$

Так как при положительных a и b равенство $[a] + [b] + 1 = [a + b]$ возможно тогда, и только тогда, когда $\{a\} + \{b\} \geq 1$, то равенство $M_k(q) = M_1(q) + 1$ возможно тогда, и только тогда, когда

$$\left\{ \frac{(k-1)p}{q} \right\} + \left\{ \frac{p}{q} \right\} \geq 1.$$

Покажем, что для заданных p и q такое k существует, причем $k \leq q$. Пусть $p = aq + r$, где $1 \leq r \leq q - 1$ и $(q, r) = 1$. Тогда

$$\left\{ \frac{(k-1)p}{q} \right\} + \left\{ \frac{p}{q} \right\} = \left\{ \frac{(k-1)r}{q} \right\} + \left\{ \frac{r}{q} \right\}.$$

Если k пробегает полную систему вычетов по модулю q , то и $(k-1)r$ пробегает полную систему вычетов по модулю q , т.е. остатки от деления $(k-1)r$ на q принимают все значения от 0 до $q-1$. Значит, можно указать k так, что остаток s из представления $(k-1)r = bq + s$ будет удовлетворять условию $q-r \leq s \leq q-1$. Для него имеем:

$$s + r \geq q, \quad \frac{s}{q} + \frac{r}{q} \geq 1.$$

Но легко видеть, что

$$\left\{ \frac{(k-1)r}{q} \right\} = \left\{ \frac{s}{q} \right\} = \frac{s}{q}, \quad \left\{ \frac{r}{q} \right\} = \frac{r}{q},$$

так что

$$\left\{ \frac{(k-1)p}{q} \right\} + \left\{ \frac{p}{q} \right\} \geq 1.$$

3°. Наконец, самое главное. При доказательстве свойства 9б автор вводит в рассмотрение величины $m_k(p_s q)$ (стр. 10, строка 8 снизу и далее). Насколько можно понять, этот символ для простых p_s и q ($q < p_s$) обозначает количество чисел k -й строки, кратных q и p_s , *которые были вычеркнуты из таблицы при вычеркивании чисел, кратных q* (именно так!). Тогда суммы

$$m_1 = m_1(p_s p_1) + \dots + m_1(p_s p_{s-1}), \quad m_k = m_k(p_s p_1) + \dots + m_k(p_s p_{s-1}),$$

действительно, выражают количества чисел в 1-й и k -й строках таблицы, зачеркнутых при последовательном удалении из таблицы чисел, кратных p_1 , затем - кратных p_2 и т.д. до p_{s-1} ¹.

Далее автор необоснованно применяет лемму 1 и заключает из неё, что при любом i , $1 \leq i \leq s$, справедливо неравенство

$$m_k(p_s p_i) \geq m_1(p_s p_i).$$

Ошибка состоит в том, что при $i \geq 2$ величина $m_k(p_s p_i)$ уже не совпадает с количеством всех чисел k -й строки, кратных произведению $p_s p_i$, к которому была бы применима лемма 1. Для простоты поясним сказанное для случая $k = 1$.

Удаляя на первом шаге из таблицы числа, кратные p_1 , мы вычеркиваем из первой строки

$$m_1(p_s p_1) = \left[\frac{p}{p_s p_1} \right]$$

чисел, кратных $p_1 p_s$ (снова для краткости пишем p вместо p_n). Далее, удаляя на втором шаге из таблицы числа, кратные p_2 , мы должны вычеркнуть уже не

$$\left[\frac{p}{p_s p_2} \right], \quad \text{а} \quad \left[\frac{p}{p_s p_1} \right] - \left[\frac{p}{p_s p_1 p_2} \right]$$

новых чисел, поскольку мы учитываем, что числа, кратные как p_1 , так и p_2 , были вычеркнуты нами на первом шаге и повторно их вычеркивать уже не нужно. Итак

$$m_1(p_s p_2) = \left[\frac{p}{p_s p_1} \right] - \left[\frac{p}{p_s p_1 p_2} \right] < \left[\frac{p}{p_s p_1} \right].$$

¹В неудачных обозначениях автора это, соответственно, суммы $m_{100} = m_1(p_s p_{01}) + \dots + m_1(p_s p_{0q})$ и $m_{k00} = m_k(p_s p_{01}) + \dots + m_k(p_s p_{0q})$, что не меняет сути дела.

Рассуждая аналогично, можно доказать, что

$$m_1(p_s p_3) = \left[\frac{p}{p_s p_3} \right] - \left[\frac{p}{p_s p_1 p_3} \right] - \left[\frac{p}{p_s p_2 p_3} \right] + \left[\frac{p}{p_s p_1 p_2 p_3} \right],$$

и вообще, при $r < s$

$$m_1(p_s p_r) = \sum_d \mu(d) \left[\frac{p}{d p_s p_r} \right],$$

где $\mu(d)$ - функция Мёбиуса, а d пробегает все числа вида $p_{i_1} \dots p_{i_m}$, где $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq r - 1$. Точно так же показывается, что

$$m_k(p_s p_r) = \sum_d \mu(d) \left(\left[\frac{kp}{d p_s p_r} \right] - \left[\frac{(k-1)p}{d p_s p_r} \right] \right),$$

где d пробегает то же множество чисел, что и выше. По сути, это есть следствие известной формулы включений-исключений.

Итак, величины $m_k(p_s p_i)$ ведут себя много сложнее, чем величины

$$\left[\frac{kp}{p_s p_r} \right] - \left[\frac{(k-1)p}{p_s p_r} \right],$$

к которым применима лемма 1.

Следует отметить, что тем арсеналом средств, которым располагает автор, едва ли можно доказать гипотезы Броккарда и Лежандра, которые не следуют даже из гипотезы Римана, и таким образом предостеречь автора от написания ошибочных работ на эту тему в дальнейшем.