УДК 511.333

ТЕОРЕМА О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ
ГИПОТЕЗА ЛЕЖАНДР
ГИПОТЕЗА БРОКАРДА

Л. А. Шыхалиев

В статье «Теоремы о распределении простых чисел» рассмотрены поведения простых чисел в целях определения причин и мест их бесконечного появления. Решения гипотезы Лежандра и гипотезы Брокарда являются следствиями «Теоремы о распределении простых чисел».

Ключевые слова: простые числа, гипотеза Лежандра, гипотеза Брокарда.

1. Постановка задачи. Множество натуральных чисел $[1,(N+2)N]$ запишем в виде таблицы, по N последовательных чисел в каждой строке следующим образом:

Таблица

1	2	3,…	$N-1$	N
$N+1$	$N+2$	$N+3,\dots$	$2N-1$	$2N$
$2N+1$	$2N+2$	$2N+3,\dots$	$3N-1$	$3N$
$3N+1$	$3N+2$	$3N+3,\dots$	$4N-1$	$4N$
…	…	…	…	…
$gN+1$	$gN+2$	$gN+3,\dots$	$(g+1)N-1$	$(g+1)N$
…	…	…	…	…
$(N-1)N+1$	$(N-1)N+2$	$(N-1)N+3,\dots$	N^2-1	N^2
N^2+1	N^2+2	$N^2+3,\dots$	$(N+1)N-1$	$(N+1)N$
$(N+1)N+1$	$(N+1)N+2$	$(N+1)N+3,\dots$	$(N+2)N-1$	$(N+2)N$
$(N+2)N+1=(N+1)^2$				

В статье будем доказывать теорему о распределении простых чисел. Данная теорема имеет несколько интерпретаций. А именно:

В каждой полной строке таблицы имеется минимум одно простое число.

Другая версия теоремы: Для любых натуральных чисел N и k, где $1 \le k \le N+2$ в интервале $[kN+1,(k+1)N]$ имеется минимум одно простое число.

Хронология доказательства:

Лемма 1;

Вспомогательная теорема;

Поведение всевозможных «проблемных» чисел $F_i = zP_1(f(P_1) + 1)$, которые не имеют «вежливых» делителей и P_1 является наименьшим «критическим» числом;

Следствие 1, следствие 2.

Определения.

N – натуральное число, $N \geq 2$.

z – натуральное число.

$L = \{2,3,5, \dots, P_{max}\}$ – множество всех простых чисел в первой строке таблицы.

P_i – простое число, $P_i \in L$, $(i = 1, 2, \dots, max)$.

$L_l = \{l_1, l_2, \dots, l_{i-1}\}$ – множество простых чисел, $L_l \in L$.

l_i – простое число, $l_i \in L$.

$f(l_i)$ – количество чисел, кратных простому числу l_i в первой строке таблицы до начала вычеркивания.

$t(l_i)$ – количество чисел, кратных простому числу $l_i \in L$ в произвольно взятой строке таблицы до начала вычеркивания.

Разность обозначим так: $t(l_i) - f(l_i) = \Delta_l$ (очевидно, что $\Delta_l = 0$, или $\Delta_l = 1$)

$f(P_i)$ – количество чисел, кратных P_i, в первой строке таблицы, $f(P_i) = \left[\frac{N}{P_i}\right]$.

В некоторых строчках таблицы данный показатель $f(P_i) = \left[\frac{N}{P_i}\right]$ сохраняется. Для таких строк число P_i обозначим как **«вежливое»** число. При этом очевидно, что в какой-нибудь другой строке таблицы количество чисел $t(P_i)$, кратных P_i, может быть на одну (и только на одну, это очевидно) штуку больше $t(P_i) = \left[\frac{N}{P_i}\right] + 1$. Значит, в данной строке таблицы имеет место быть число, кратное числу $P_i\left(\left[\frac{N}{P_i}\right] + 1\right)$. Для таких строк число P_i обозначим как **«критическое»** число. А число $F = zP_i\left(\left[\frac{N}{P_i}\right] + 1\right)$ обозначим как

«проблемное» число. Появление «проблемного» числа в строке таблицы обозначим как **«увеличение»** числа P_i в **«пользу»** числа $\left[\frac{N}{P_i}\right]+1$.

«Увеличение» обозначим →. Например, если P_1 «увеличено» в «пользу» P_2, то $P_1 \to P_2$ или $P_1 \to \left[\frac{N}{P_1}\right]+1$. Если $P_1 \to P_2 \to P_3$, то $P_1 \to \left[\frac{N}{P_1}\right]+1 \to \left[\frac{N}{\left[\frac{N}{P_1}\right]+1}\right]+1$,

если $P_1 \to P_2 \to P_3 \to P_4$, то $P_1 \to \left[\frac{N}{P_1}\right]+1 \to \left[\frac{N}{\left[\frac{N}{P_1}\right]+1}\right]+1 \to \left[\frac{N}{\left[\frac{N}{\left[\frac{N}{P_1}\right]+1}\right]+1}\right]+1 \to, \ldots$

и т.д.

$F(l_i)$ – количество не вычеркнутых чисел, кратных простому числу l_i в первой строке таблицы после вычеркивания чисел, кратных всем простым числам множества L_l.

$T(l_i)$ – количество не вычеркнутых чисел, кратных простому числу $l_i \in L$ в произвольно взятой строке таблицы после вычеркивания чисел, кратных всем простым числам множества L_l.

Разность обозначим так: $T(l_i) - F(l_i) = \delta_l$.

$p\left[\frac{N}{p}\right]$ – наибольшее число в первой строке таблицы, кратное натуральному числу p.

Свойство 1. Если «критическое» число P_1 «увеличено» в «пользу» числа P_2, то число P_1P_2 является наименьшим числом во второй строке таблицы, кратным P_1.

2. Введение. В первой и произвольно взятой (кроме второй) строках таблицы параллельно (одновременно) будем вычеркивать все числа, кратные простым числам множества L. После вычеркивания сравниваем как результат количества вычеркнутых (их разность) чисел в первой и в произвольно взятой строках таблицы (в данной статье о «решето Эратосфена» речь не идет).

Например, если вычеркнем в таблице все числа, кратные N, и сравним результаты, то убедимся, что в произвольно взятой строке вычеркнем не

больше чисел, чем в первой строке таблицы.

Вычеркнутые числа повторно не вычеркиваем.

Пример вычеркивания. В последнем столбце таблицы все числа имеют «вежливого» делителя (например, все они кратные N), не зависимо от того, что N простое или составное число. В первой и произвольно взятой строке таблицы вычеркиваем все числа, кратные простому числу 2. Есть два варианта. Если N четное число, то очевидно, что во всех строчках таблицы простое число 2 является «вежливым» числом. Если N нечетное число, то в четных по счету (с верху в низ) строчках таблицы «критическое» число 2 окажется «увеличенным» в «пользу» какого-нибудь числа. Но от того, что числа последнего столбца (вычеркнем числа, кратные N) имеют «вежливых» множителей, «критическое» число 2 во всех строчках таблицы становится «вежливым» числом. В результате в произвольно взятой строке мы вычеркнули не больше чисел, чем в первой строке таблицы.

Согласно постулату Бертрана: для любого натурального $N \geq 2$ найдется простое число в интервале $[N, 2N]$. Поэтому в данной работе вторую строчку таблицы на наличие в ней простых чисел не анализируем (не доказываем).

Вычеркивание чисел, кратных конкретно взятому простому числу, осуществляется таким образом (так получается), что в результате в произвольно взятой строке таблицы вычеркиваем не больше чисел, чем в первой строке таблицы. После вычеркивания чисел в таблице, кратных каждому простому числу множества L, в первой строке таблицы минимум одно число, «единица», всегда остается не вычеркнутой (это очевидно). Значит, в произвольно взятой строке то же, как минимум, одно число остается не вычеркнутой, что и является простым числом.

Предположим, что в таблице вычеркнули все числа, кратные каждому

числу множества простых чисед $L_l = \{l_1, l_2, \dots, l_{i-1}\} \in L$.

$t(l_i)$ – количество чисел, кратных простому числу $l_i \in L$ в произвольно взятой строке таблицы до начала вычеркивания.

$f(l_i)$ – количество чисел, кратных простому числу $l_i \in L$ в первой строке таблицы до начала вычеркивания.

Разность обозначим так:

$$t(l_i) - f(l_i) = \Delta_l \Rightarrow t(l_i) = f(l_i) + \Delta_l, \quad (1)$$

где $\Delta_l = 0$, или $\Delta_l = 1$. см. пункт 6.

$T(l_i)$ – количество не вычеркнутых чисел, кратных простому числу $l_i \in L$ в произвольно взятой строке таблицы после вычеркивания чисел всем простым числам множества $L_l = \{l_1, l_2, \dots, l_{i-1}\} \in L$.

$F(l_i)$ – количество не вычеркнутых чисел, кратных простому числу $l_i \in L$ в первой строке таблицы после вычеркивания чисел множеству простых чисел $L_l = \{l_1, l_2, \dots, l_{i-1}\} \in L$.

Разность обозначим так:

$$T(l_i) - F(l_i) = \delta_l. \quad (2)$$

Лемма 1 (лемма о сохранении порядка). Для значений Δ_l и δ_l выполняется неравенство $\delta_l \leq \Delta_l$.

Доказательство леммы 1. Предположим, что в произвольно взятой строке при вычеркивании чисел кратных простому числу (пусть будет l_1) из множества $L_l = \{l_1, l_2, \dots, l_{i-1}\} \in L$ были вычеркнуты числа, кратные l_i. Следовательно, были вычеркнуты числа кратные числу $l_1 l_i$. Знаем, что для натурального числа $l_1 l_i$ выполняется условие

$$t(l_1 l_i) \geq f(l_1 l_i) \quad (3)$$

$$t(l_i) - t(l_1 l_i) = T(l_i) \quad (4)$$

$$f(l_i) - f(l_1 l_i) = F(l_i) \quad (5)$$

Из (1) вычитываем (3), так же учитываем (4), (5) и (2)

$$t(l_i) - t(l_1 l_i) \leq f(l_i) + \Delta_l - f(l_1 l_i) \Rightarrow T(l_i) \leq F(l_i) + \Delta_l \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F(l_i) + \delta_l \leq F(l_i) + \Delta_l \Rightarrow \delta_l \leq \Delta_l$$

Лемма 1 доказана.

Вспомогательная теорема. В каждой строке таблицы, где отсутствует «критическое» число, имеется минимум одно простое число.

Доказательство.

Предположим, что число P_1 для произвольно взятой строки таблицы «критическое», и «увеличено» в «пользу» «вежливого» числа P_2, то есть $P_2 = \left[\frac{N}{P_1}\right] + 1$. Можно предположить, что в данной строке появилось некоторое «проблемное» число

$F_1 = zP_1P_2 = zP_1\left(\left[\frac{N}{P_1}\right] + 1\right)$.

В первой строке таблицы имеется $\left[\frac{N}{P_1}\right]$ чисел, кратные P_1, и $\left[\frac{N}{P_2}\right]$ чисел, кратные P_2. В первой строке нет числа, кратное числу $P_1P_2 = P_1\left(\left[\frac{N}{P_1}\right] + 1\right)$. Всего в первой строке таблицы количество чисел, кратные P_1 и/или P_2 будет

$$f(P_1) + f(P_2) - f(P_1P_2) = \left[\frac{N}{P_1}\right] + \left[\frac{N}{P_2}\right] - \left[\frac{N}{P_1P_2}\right] = \left[\frac{N}{P_1}\right] + \left[\frac{N}{P_2}\right]$$

В произвольно взятой строке таблицы имеется $\left[\frac{N}{P_1}\right] + 1$ чисел, кратные P_1, и $\left[\frac{N}{P_2}\right]$ чисел, кратные P_2. Всего в произвольно взятой строке таблицы количество чисел, кратные P_1 и/или P_2 будет

$$t(P_1) + t(P_2) - t(P_1P_2) = \left(\left[\frac{N}{P_1}\right] + 1\right) + \left[\frac{N}{P_2}\right] - \left(\left[\frac{N}{P_1P_2}\right] + \Delta\right)$$

Больше одного таких «проблемных» чисел $F_1 = zP_2P_1$ в одну строчку таблицы не умещается, и здесь $\Delta = 1$. При вычеркивании чисел, кратных «вежливому» числу P_2, в произвольно взятой строке таблицы вычеркивается и «проблемное» число $F_1 = zP_2P_1$, в результате чего число P_1 то же становится «вежливым».

$$\left[\frac{N}{P_1}\right] + \left[\frac{N}{P_2}\right] = \left[\frac{N}{P_1}\right] + 1 + \left[\frac{N}{P_2}\right] - \left(\left[\frac{N}{P_1P_2}\right] + \Delta\right)$$

С учетом леммы 1 получается, что в произвольно взятой строке вычеркнуто не больше чисел, чем в первой строке. А в первой строке как минимум одно число

не вычеркнуто (это «единица»). Значит в произвольно взятой строке тоже минимум одно число остается не вычеркнутым, что и является простым числом.

Вспомогательная теорема доказана.

3. Предположим, что на очередном этапе вычеркивания в таблице столкнулись с первым «критическим» числом – то есть с наименьшим «критическим» простым числом. Пусть это будет P_1. Другими словами, в произвольно взятой строке есть «проблемное» число с натуральным делителем P_1.

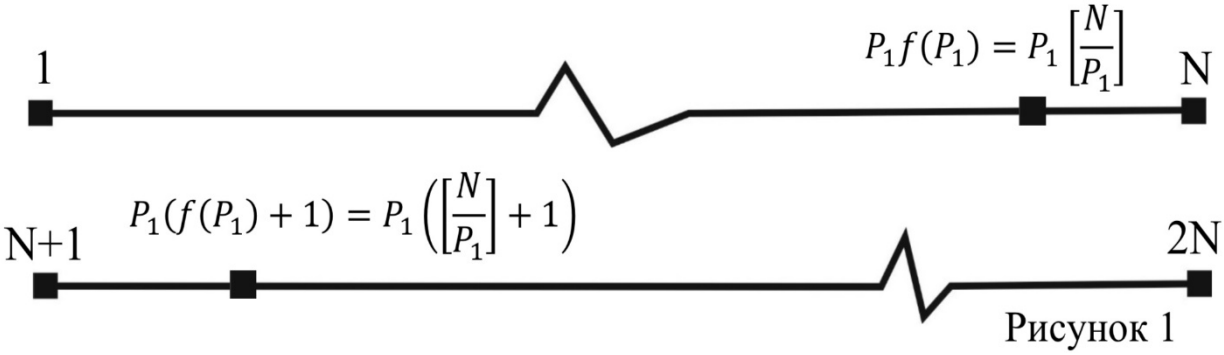

Рисунок 1

4. Поведение всевозможных «проблемных» чисел $\boldsymbol{F_i = zP_1(f(P_1)+1)}$, которые не имеют «вежливых» делителей и $\boldsymbol{P_1}$ является наименьшим «критическим» числом.

В доказательстве вспомогательной теоремы мы изучали поведение числа $F_1 = zP_1P_2 = zP_1\left(\left[\frac{N}{P_1}\right]+1\right)$, где P_1 единственное «критическое» число, и «увеличено» в «пользу» «вежливого» числа P_2.

А теперь предположим, что в произвольно взятой строке есть «проблемное» число $F_i = zP_1P_2 = zP_1(f(P_1)+1)$, где числа P_1 и $f(P_1)+1$ оба **разные** «критические» простые числа. То есть $P_1 \neq f(P_1)+1$.

Вариант 1. Предположим, что в произвольно взятой строке таблицы наименьшее «критическое» число P_1 «увеличено» в «пользу» простого числа $P_2 = f(P_1)+1 = \left(\left[\frac{N}{P_1}\right]+1\right)$. В то же время число $f(P_1)+1$ является «критическим» простым числом (значит, $P_2 > P_1$), и «увеличено» в «пользу» простого числа P_1, то есть $\left(\left[\frac{N}{f(P_1)+1}\right]+1\right) = P_1$. В произвольно взятой строке

таблицы появляется «проблемное» число $F_2 = zP_1P_2 = zP_1(f(P_1) + 1)$. Первые две строчки таблицы представим как на рисунке 1. Очевидно что, если $z = 1$, то число $F_2 = P_1P_2 = P_1\left(\left[\frac{N}{P_1}\right] + 1\right)$ находится во второй строке таблицы. Если $z > 1$, и имеет «вежливый» делитель (пусть будет v), то «проблемное» число F_2 вычеркивается когда вычеркиваем числа, кратные «вежливому» v, и в продолжении вычеркивания ранее «критические» числа P_1 и P_2 становятся «вежливыми».

Вариант 2. Рассмотрим «проблемное» число $F_3 = zP_1P_2$. В продолжении для «критических» чисел P_1 и P_2 предположим, что $z > 1$ и не имеет «вежливого» простого делителя. То есть все простые делители z «критические». С учетом, что P_1 является наименьшим «критическим» простым числом, то $P_2 > P_1$. Не может быть $z = P_3P_4$, где P_3 и P_4 оба «критические» простые числа, и P_3 «увеличено» в «пользу» P_4 (и/или же наоборот). На рисунке 1 видно, что число $P_1P_2 = P_1\left(\left[\frac{N}{P_1}\right] + 1\right)$ и число $P_3P_4 = P_3\left(\left[\frac{N}{P_3}\right] + 1\right)$, оба находятся во второй строке таблицы. Выполняются условия $P_1P_2 \geq N + 1$, и $P_3P_4 \geq N + 1$. Получается $F_3 \geq (N + 1)^2$. А это означает, что число $F_3 = P_1P_2P_3P_4$ находится вне таблицы.

Вариант 3. Далее, рассмотрим варианты, если «увеличение» наименьшего «критического» числа P_1 продолжится так: $P_1 \to P_2 \to \cdots \to P_j \to \cdots \to P_n$. А «проблемное» число будет так: $F_4 = P_1P_2 \cdot \ldots \cdot P_j \cdot \ldots \cdot P_n$. Среди натуральных делителей «проблемного» числа F_4 нет «вежливых» чисел, и длина строчки таблицы (то есть значение N) ограничена. Поэтому «критическое» число P_n тоже должно быть «увеличено». Тут возможно два варианта: или $P_n \to P_j$, или $P_n \to P_1$. Здесь $j = 2, \ldots, n$, и $n \geq 4$.

Рисунок 2

На рисунке 2 видно, что не зависимо от того $P_1P_2 > P_{j-1}P_j$ или $P_{j-1}P_j > P_1P_2$, выполняется условия $P_1P_2 \geq N+1$ и $P_{j-1}P_j \geq N+1$. Значит, $F_4 \geq (N+1)^2$.

Вариант 4. Рассмотрим вариант $F_5 = P_1P_2P_3$, где или $P_1 \to P_2 \to P_3 \to P_1$, или $P_1 \to P_2 \to P_3 \to P_2$.

На рисунке 3 видно противоречие. Согласно свойству 1 во второй строке число P_1P_2 является наименьшим числом, которое кратно числу P_1 (так как $P_1 \to P_2$), так же число P_2P_3 является наименьшим числом во второй строке, которое кратно числу P_2. Однако этим двум условиям противоречат местонахождения чисел P_3P_1 (в случае $P_3 \to P_1$) и P_3P_2 (в случае $P_3 \to P_2$) соответственно.

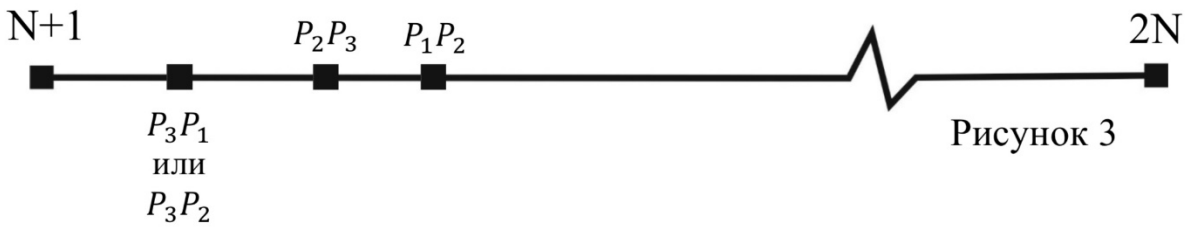

Рисунок 3

Свойство 2. В $(g+1)$-й строке таблицы число g является «вежливым» числом. Другими словами, в первой и $(g+1)$-й строках таблицы количество чисел, кратных g равны, и находятся в одних и тех же столбиках таблицы. Это очевидно.

Вариант 5. Рассмотрим вариант, когда в произвольно взятой строке есть «проблемное» число $F_6 = P_1P_2^2$, где $P_1 \to P_2$ и $P_2 \to P_2$.

Рисунок 4

На рисунке 4, с учетом свойства 1, видно, что должно быть $P_1 > P_2$. Другими словами, в случае $P_1 > P_2$ «проблемного» числа в виде $P_1^2P_2$ не может быть. Запишем $P_2P_2 = N + \gamma \underset{\gamma<P_2}{\Longrightarrow} P_1P_2^2 = P_1(N+\gamma) = P_1N + P_1\gamma$. Так как число P_1P_2 во второй строке наименьшее число, кратное P_1 (свойство 1), то $P_1\gamma < N$. Следовательно, число $F_6 = P_1P_2^2 = P_1N + P_1\gamma$ находится в строке под номером $P_1 + 1$. С учетом свойства 2 число P_1 является «вежливым», и число $F_6 = P_1P_2^2$

не «проблемное».

Вариант 6. Рассмотрим вариант, когда в произвольно взятой строке есть «проблемное» число $F_7 = P_1P_2^2$, где $P_1 \to P_2$ и $P_2 \to P_1$

Рисунок 5

Запишем (рисунок 5) $P_1P_2 = N + \gamma \xRightarrow[\gamma<P_1 \text{ и } \gamma<P_2]{} P_1P_2^2 = P_2(N+\gamma) = P_2N + P_2\gamma$.

Так как число P_1P_2 во второй строке наименьшее число, кратное P_1 и P_2 (свойство 1) одновременно, то $P_2\gamma < N$. Следовательно, число $F_7 = P_1N + P_1\gamma$ находится в строке под номером $P_1 + 1$. С учетом свойства 2 число P_1 является «вежливым», и число $F_7 = P_1P_2^2$ не «проблемное».

Вариант 7. Рассмотрим вариант, когда в произвольно взятой строке есть «проблемное» число $F_8 = P_1^\alpha$, где $P_1 \to P_1$. Очевидно, что $\alpha = 3$. В противном

Рисунок 6

случае (рисунок 6), или $F_8 = P_1^4 \geq (N+1)^2$ (число находится вне таблицы), или число $F_8 = P_1^2$ находится во второй строке. Значит, $F_8 = P_1^3$. Запишем $P_1P_1 = N + \gamma \xRightarrow[\gamma<P_1]{} P_1^3 = P_1(N+\gamma) = P_1N + P_1\gamma$. Так как число P_1P_1 во второй строке наименьшее число, кратное P_1 (свойство 1), то $P_1\gamma < N$. Следовательно, число $F_8 = P_1^3 = P_1N + P_1\gamma$ находится в строке под номером $P_1 + 1$. С учетом свойства 2 число P_1 является «вежливым», и $F_8 = P_1^3$ является «вежливым» числом.

Теорема о распределении простых чисел доказана.

Следствие 1. Гипотеза Лежандра. Для любого натурального N между N^2 и $(N+1)^2$ найдется хотя бы одно простое число.

Очевидно, что гипотеза Лежандра является частным случаем теоремы о распределении простых чисел, и для любого натурального N между N^2 и

$(N+1)^2$ найдется хотя бы два простых числа, так как в указанном интервале имеется две полных строк (минимум по одному простому числу в каждом).

Следствие 2. Гипотеза Брокарда. Для любого натурального числа n между p_n^2 и p_{n+1}^2 (где $p_n > 2$ и p_{n+1} два последовательные простые числа) найдется хотя бы четыре простых числа.

Для любого простого числа $p_n > 2$ можно записать так:

$p_n = N - 1$ и $p_n + 2 = N + 1$

Крайние числа p_n^2 и p_{n+1}^2 оба составные числа. Рассмотрим как минимум четыре полных строк в таблице. А именно между $p_n^2 = (N-1)^2$ и $(p_n + 2)^2 = (N+1)^2$ имеется четыре полных строк, в каждой из которых имеется минимум по одному простому числу. Мы учитываем, что минимальная разница между последовательными (начиная с тройки) простыми числами равно 2, и поэтому выбрали $p_n + 2 = N + 1$. Значит, чем больше разница между последовательными простыми числами, тем больше простых чисел между их квадратами.

	…	$(N-2)N$
$(N-1)^2$	…	$(N-1)N$
$(N-1)N+1$	…	N^2
N^2+1	…	$(N+1)N$
$(N+1)N+1$	…	$(N+2)N$
$(N+1)^2$	…	