PRIME NUMBER DISTRIBUTION THEOREM

THE 3RD LANDAU PROBLEM (LEGENDRE'S CONJECTURE)

BROCARD'S CONJECTURE

Logman Shihaliev

logman1@list.ru The 1982 Decision +994505149553

ORCID: 0000-0003-1063-4712

ТЕОРЕМА О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ

Постановка задачи. Множество натуральных чисел $[1,(N+2)N]$ запишем в виде таблицы, по N последовательных чисел в каждой строке следующим образом (в данной статье о **«решето Эратосфена»** речь не идет):

1	2	$3,\dots$	$N-1$	N
$N+1$	$N+2$	$N+3,\dots$	$2N-1$	$2N$
$2N+1$	$2N+2$	$2N+3,\dots$	$3N-1$	$3N$
$3N+1$	$3N+2$	$3N+3,\dots$	$4N-1$	$4N$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$mN+1$	$mN+2$	$mN+3,\dots$	$(m+1)N-1$	$(m+1)N$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$(N-1)N+1$	$(N-1)N+2$	$(N-1)N+3,\dots$	N^2-1	N^2
N^2+1	N^2+2	$N^2+3,\dots$	$(N+1)N-1$	$(N+1)N$
$(N+1)N+1$	$(N+1)N+2$	$(N+1)N+3,\dots$	$(N+2)N-1$	$(N+2)N$
$(N+2)N+1=(N+1)^2$				

Аннотация. Используя теорему о распределении простых чисел, доказываем множество открытых проблем теории чисел – гипотеза Брокарда, 3-я проблема Ландау и др.

Действие. Одновременно в произвольно взятой и первой строках таблицы вычеркиваем все числа, кратные простому числу $p \in L=\{2,3,5,\dots,P\}$.

Здесь L – множество всех простых чисел в первой строке таблицы, и p пробегает по всем простым числам множества L. В некоторых строчках таблицы (до начала вычеркивания) количество чисел, кратных некоторым числам (далее в тексте эти числа обозначены как *критические* числа) множества L, на 1 штуку больше, чем в первой строке (далее в тексте эти числа обозначены как *проблемные* числа). В произвольно взятых строчках вычеркиваем не больше чисел, чем в первой строке таблицы. При необходимости (**теоретически**), в целях сохранения такого равновесия вычеркнутых (в произвольно взятых и первой строках) чисел, мы в некоторых случаях *проблемные* числа оставляем (**теоретически**) не вычеркнутыми. В итоге доказываем (лемма 3), что по результатам вычеркивания в таблице **фактически** проблемных чисел не остается. А в первой строке число «1» (единица) остается не вычеркнутой. Значит, в каждой строке таблицы остается не вычеркнутым как минимум одно число – простое число.

Теорема. Для любых натуральных чисел $N \geq 2$ и k, где $1 \leq k \leq N + 2$ в интервале $[(k-1)N + 1, kN]$ имеется минимум одно простое число.

Другими словами: в каждой полной строке вышеуказанной таблицы имеется минимум одно простое число.

Доказательство теоремы.

Очевидно, что в первой строке таблицы простое число всегда есть.

Согласно Постулату Бертрана, для любого натурального $N \geq 2$ найдется простое число в интервале $[N, 2N]$. Значит, при $N \geq 2$ во второй строке таблицы есть простое число.

Теперь докажем, что, **начиная с третей строки**, в произвольно взятой строке таблицы имеется минимум одно простое число.

Лемма 1. Для любого (произвольно взятого) натурального числа $m \leq N$ в произвольно взятой строке таблицы количество чисел $f(m)$, кратных m запишем:

$$f(m) = t(m) + \Delta_m \quad \textbf{(1)}$$

Здесь $t(m) = \left[\frac{N}{m}\right]$ – количество чисел, кратных m, в первой строке таблицы.

Докажем, что, либо $\Delta_m = 0$, либо $\Delta_m = 1$.

Доказательство Леммы 1. Достаточно доказать, что $\Delta_m < 2$.

Длину (количество всех чисел в строке) первой строки запишем так

$$N = (m-1) + \left(1 + \left(\left[\frac{N}{m}\right] - 1\right) \cdot m\right) + \alpha = \left[\frac{N}{m}\right] \cdot m + \alpha \qquad \textbf{(2)}$$

Здесь $0 \leq \alpha \leq m-1$, **(3)**

$(m-1)$ – количество чисел в начале первой строки до m,

α – количество чисел (в конце первой строки) после наибольшего числа, кратного m.

Предположим, что в некоторой строке таблицы $\Delta_m = 2$. В таком случае **минимальная** длина (количество чисел) такой строки будет

$$N = \left(\left(\left[\frac{N}{m}\right] + \Delta_m\right) - 1\right) \cdot m + 1 = \left(\left(\left[\frac{N}{m}\right] + 2\right) - 1\right) \cdot m + 1 = \left[\frac{N}{m}\right] \cdot m + m + 1 \qquad \textbf{(4)}$$

С учетом (2), (3) и (4) получаем следующее противоречие:

$$\left[\frac{N}{m}\right] \cdot m + \alpha = \left[\frac{N}{m}\right] \cdot m + m + 1 \Rightarrow \alpha = m + 1$$

Лемма 1 доказана.

Обозначение. Для $\Delta_m = 0$ число m обозначим как *доброе* число. А для $\Delta_m = 1$ число m обозначим как *критическое* число.

Обозначение. Если в какой-нибудь строке $\Delta_m = 1$, то это обозначим так: в данной строке число $f(m)$ «*увеличено в пользу числа*» $\left[\frac{N}{m}\right] + 1$, либо $f(m) \rightarrow \left[\frac{N}{m}\right] + 1$.

Обозначение. Если $\Delta_m = 1$, то в такой строке есть число F, которое кратно числу $m \cdot \left(\left[\frac{N}{m}\right] + 1\right) > N$. Другими словами, в данной строке произошло увеличение $f(m)$ в пользу $\left[\frac{N}{m}\right] + 1$, то есть $f(m) \rightarrow \left[\frac{N}{m}\right] + 1$. Число F обозначим как *проблемное* число, и определим так

$$F = zm\left(\left[\frac{N}{m}\right] + 1\right) = zP_1P_2 = zP_1\left(\left[\frac{N}{P_1}\right] + 1\right) \geq N + 1. \qquad \textbf{(4A)}$$

Здесь $m = P_1$, $\left[\frac{N}{P_1}\right] + 1 = P_2$, $P_1 \rightarrow \left[\frac{N}{P_1}\right] + 1$, z – натуральное число.

Свойство 1. Пронумеруем строчки таблицы как 1, 2, 3,… Для строк под номерами

$$\{1, m+1, 2m+1, 3m+1, \dots\} \qquad \textbf{(4B)}$$

значение $\Delta_m = 0$ периодически повторяется.

Следствие **Свойства 1**. Во всех строчках, указанных (4В) число m является добрым.

Лемма 2. Предположим, что мы вычеркнули в произвольно взятой строке (одновременно и в первой строке) таблицы всех чисел, кратных доброму (при наличии) простому числу $p_1 \in L$, для которого было

$$f(p_1) = t(p_1)$$

После такого вычеркивания изучим количество оставшихся (не вычеркнутых) чисел, кратных произвольно взятому простому числу $p_i \in L \setminus p_1$, для которого изначально было

$$f(p_i) = \left[\frac{N}{p_i}\right] + \Delta_{p_i} = t(p_1) + \Delta_{p_1}.$$

А после вычеркивания чисел, кратных $p_1 \in L$, стало

$$F(p_i) = T(p_i) + \delta_{p_i}$$

При этом очевидно, что в первой и произвольно взятой строках не останется чисел, кратных $p_1 p_i$.

Докажем, что

$$\delta_{p_i} \le \Delta_{p_i} \qquad \textbf{(5)}$$

Доказательство Леммы 2. Согласно (1) для простого числа p_i и для $m = p_1 p_i$ запишем:

$$f(p_i) = t(p_i) + \Delta_{p_i} \qquad \textbf{(6)}$$

$$f(p_1 p_i) \ge t(p_1 p_i) \qquad \textbf{(7)}$$

$$F(p_i) = T(p_i) + \delta_{p_i} \qquad \textbf{(8)}$$

Из (6) вычитываем (7)

$$f(p_i) - f(p_1 p_i) \le t(p_i) - t(p_1 p_i) + \Delta_{p_i} \qquad \textbf{(9)}$$

В (8) заменим

$F(p_i) = f(p_i) - f(p_1 p_i)$

$T(p_i) = t(p_i) - t(p_1 p_i)$

Получим

$$F(p_i) \leq T(p_i) + \Delta_{p_i} \quad \textbf{(10)}$$

Сравним (8) и (10), получим

$$\delta_{p_i} \leq \Delta_{p_i} \quad \textbf{(11)}$$

Лемма 2 *доказана.*

Следствие 1 Леммы 2. Добрые числа в процессе вычеркивания критическими не становятся.

Следствие 2 Леммы 2. Если в произвольно взятой строке, при $\Delta_m = 1$, число $\left[\frac{N}{m}\right] + 1$ (либо один из его множителей) является добрым числом, то при вычеркивании чисел, кратных числу $\left[\frac{N}{m}\right] + 1$ (либо его доброму делителю), число m становится добрым. Например, для $N = 13$ в третей строке $\Delta_3 = 1$. Другими словами, в первой строке такой таблицы четыре числа $(3, 6, 9, 12)$ кратны 3, а в третей строке таких чисел пять $(27, 30, 33, 36, 39)$. То есть $3 \to \left[\frac{13}{3}\right] + 1 = 5$. Число 5 в данной строке доброе число, то есть $\Delta_5 = 0$. В третей строке вычеркиваем два числа $(30, 35)$, кратные доброму числу 5. Параллельно и в первой строке вычеркиваем два числа $(5, 10)$, кратные доброму числу 5. В новом состоянии третей строки таблицы количество чисел $(27, 33, 36, 39)$, кратных числу 3, стало столько же, сколько в первой строке $(3, 6, 9, 12)$ – четыре штуки. То есть, вначале было $f(3) = \left[\frac{13}{3}\right] + 1 = t(3) + 1 = 4 + 1 = 5.$ А после вычеркивания чисел, кратных 5, для числа 3 получилось $\delta_3 = 0 \Rightarrow F(3) = T(3) + \delta_3 = T(3) + 0 = 4$.

1	2	3	4	~~5~~	6	7	8	9	~~10~~	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	~~30~~	31	32	33	34	~~35~~	36	37	38	39

Следствие 3 Леммы 2. На любом этапе вычеркивания **Если** $\Delta_p= 0$ (или $\delta_p = 0$), то в произвольно взятой строке таблицы вычерним не больше чисел (кратных доброму p), чем в первой строке таблицы (кратных p), и при этом в произвольно взятой строке не останется ни одного числа, кратного p.

Лемма 3. **Если** $\Delta_p= 1$, то в произвольно взятой строке имеется критическое простое p, и возможно имеется проблемное число (4А)

$$F = zm\left(\left[\frac{N}{m}\right] + 1\right) = zP_1P_2 = zP_1\left(\left[\frac{N}{P_1}\right] + 1\right) \geq N + 1.$$

Докажем, что после вычеркивания (в произвольно взятой строке вычеркиваем не больше чисел, чем в первой строке) чисел, кратных всем простым числам множества $L = \{2,3,5, \dots, P\}$, в таблице не останется ни одного не вычеркнутого проблемного числа.

Доказательство Леммы 3. Доказательства от противного. В доказательствах отдельных лемм буквой γ обозначены величины, соответствующие условиям леммы. По результатам двух лемм очевидно, что при вычеркивании чисел, кратных добрым числам в произвольно взятой строке вычеркнули не больше чисел, чем в первой строке таблицы. В процессе такого вычеркивания некоторые критические числа стали добрыми. Следовательно, если в конце вычеркивания какие-нибудь проблемные числа остались не вычеркнутыми, то множители (делители) таких проблемных чисел могут быть только критическими простыми числами (так как числа с добрыми делителями уже вычеркнуты). Предположим, что в конце вычеркивания в произвольно взятой строке некоторые проблемные числа F остались не вычеркнутыми (4). Составим таблицу возможных таких проблемных чисел. Здесь $\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ множество всевозможных критических чисел:

$F_1 = P_1P_2P_3P_4$	$F_2 = P_1^3$	$F_3 = P_1P_2^2$	$F_4 = P_1P_2P_3$

Вспомогательная лемма 3.1. Если не вычеркнутое проблемное число имеет вид $F_1 = P_1P_2P_3P_4$, то согласно (4) для $\{P_\mu, P_j, P_y, P_r\} = \{P_1, P_2, P_3, P_4\}$

выполняются неравенства:

$P_\mu \cdot P_j \geq N+1, \quad P_y \cdot P_r \geq N+1.$

Следовательно,

$$F_1 = P_1P_2P_3P_4 \geq (N+1)^2 \qquad \textbf{(12)}$$

(12) противоречит предположению, так как число $(N+1)^2$ находится вне таблицы.

ВСПОМОГАТЕЛЬНАЯ ЛЕММА 3.1 доказана.

ВСПОМОГАТЕЛЬНАЯ ЛЕММА 3.2. Если не вычеркнутое проблемное число имеет вид $F_2 = P_1^3$, то возможен один вариант:

$P_1 \to P_1$,

Следовательно

$$P_1 \to P_1 \Rightarrow P_1 = \left[\frac{N}{P_1}\right] + 1 \Rightarrow P_1 \cdot \left(\left[\frac{N}{P_1}\right] + 1\right) = P_1^2 \Rightarrow N+1 \leq P_1^2 < 2N$$

Так как во второй строке таблицы число P_1^2 является наименьшим числом, кратным P_1, запишем $P_1^2 - P_1 < N$, и продолжим следующим образом

$$P_1^2 - N = \gamma < P_1 \Rightarrow \gamma \leq P_1 - 1 \Rightarrow P_1\gamma \leq P_1^2 - P_1 < N \Rightarrow P_1\gamma < N,$$

и следовательно

$$P_1^2 - N = \gamma \Rightarrow P_1^3 - P_1N = P_1\gamma \Rightarrow P_1^3 = P_1N + P_1\gamma \qquad \textbf{(13)}$$

(13) означает, что число $F_2 = P_1^3 = P_1N + P_1\gamma$ находится в (P_1+1)-й строке таблицы. Согласно следствию **СВОЙСТВА 1**, число P_1 является добрым, и значит, число $F_2 = P_1^3$ не является проблемным.

ВСПОМОГАТЕЛЬНАЯ ЛЕММА 3.2 доказана.

ВСПОМОГАТЕЛЬНАЯ ЛЕММА 3.3. Если не вычеркнутое проблемное число имеет вид $F_3 = P_1P_2^2$, то возможны четыре варианта:

$P_1 \to P_2 \to P_1$	$P_1 \to P_2 \to P_1$	$P_1 \to P_2 \to P_2$	$P_1 \to P_2 \to P_2$
$P_1 > P_2$	$P_1 < P_2$	$P_1 > P_2$	$P_1 < P_2$

Если **Для** $F_3 = P_1P_2^2$ выполняется $P_1 \to P_2 \to P_1$ и $P_1 > P_2$, то число P_1P_2 является наименьшим числом во второй строке таблицы, кратным одновременно и P_1, и P_2. Далее, для $\gamma < P_2 < P_1$ запишем $P_1P_2 = N + \gamma$. Последнее умножим на P_2, и получим

$F_3 = P_1P_2^2 = P_2N + P_2\gamma$

Так как $\gamma < P_1$, то $P_2\gamma < N$. В противном случае число $P_2\gamma < P_1P_2$ должно находиться во второй строке (P_1P_2 наименьшее число во второй строке, кратное P_2). Получается, что, число $F_3 = P_1P_2^2 = P_2N + P_2\gamma$ находится в $(P_2 + 1) -$ й строке, следовательно, согласно следствию **Свойства 1**, число P_2 не критическое, и число $F_3 = P_1P_2^2$ не проблемное.

Аналогично для $P_1 \to P_2 \to P_1$ и $P_1 < P_2$ доказываем, что число P_2 не критическое, и число $F_3 = P_1P_2^2$ не проблемное.

Для $F_3 = P_1P_2^2$ если $P_1 \to P_2 \to P_2$ и $P_1 > P_2$, то число P_2^2 является наименьшим числом во второй строке таблицы, кратным P_2. Запишем $P_2^2 = N + \gamma$. Умножим на P_1 и получим $P_1P_2^2 = P_1N + P_1\gamma$. С учетом $\gamma < P_2 < P_1$ получаем $P_1\gamma < N$. Число $F_3 = P_1P_2^2 = P_1N + P_1\gamma$ находится в $(P_1 + 1) -$ й строке, следовательно, согласно следствию **Свойства 1**, число P_1 не критическое, и число $F_3 = P_1P_2^2$ не проблемное.

Для $F_3 = P_1P_2^2$ если $P_1 \to P_2 \to P_2$ и $P_1 < P_2$, то получается, что числа P_1P_2 и P_2^2 одновременно являются наименьшими числами во второй строке, кратными P_2. А это не возможно по причине $P_1 \neq P_2$.

Вспомогательная лемма 3.3 доказана.

Вспомогательная лемма 3.4. Если не вычеркнутое проблемное число имеет вид $F_4 = P_1P_2P_3$, то имеется три варианта

$P_1 \to P_2 \to P_3 \to P_1$	$P_1 \to P_2 \to P_3 \to P_2$	$P_1 \to P_2 \to P_3 \to P_3$

Для $F_4 = P_1P_2P_3$ если $P_1 \to P_2 \to P_3 \to P_1$, то теоретически получается:

* Число P_1P_2 во второй строке наименьшее число, кратное P_1.

** Число P_3P_1 во второй строке наименьшее число, кратное P_3. То есть, должна быть $P_1P_2 < P_3P_1$.

*** Число P_2P_3 во второй строке наименьшее число, кратное P_2. То есть, теоретически должно быть

$P_2P_3 < P_1P_2 \Rightarrow P_3 < P_1$,

$P_2P_3 > P_3P_1 \Rightarrow P_2 > P_1$

$P_1P_2 < P_3P_1 \Rightarrow P_2 < P_3$.

По первым двум неравенствам получается $P_3 < P_1 < P_2 \Rightarrow P_3 < P_2$. А это противоречит третьему неравенству, где $P_2 < P_3$.

Для $F_4 = P_1P_2P_3$ если $P_1 \to P_2 \to P_3 \to P_2$, то теоретически получается:

* Число P_1P_2 во второй строке наименьшее число, кратное P_1.

** Число P_2P_3 во второй строке наименьшее число, кратное P_2. Так же условие $P_3 \to P_2$ означает, что число P_2P_3 во второй строке наименьшее число, кратное P_3. То есть, должна быть $P_2P_3 < P_1P_2$.

Запишем $P_2P_3 = N + \gamma$. Умножим на P_1, получим $P_1P_2P_3 = P_1N + P_1\gamma$. Так как $\gamma < P_2$, $\gamma < P_3$, то $P_1\gamma < P_1P_2$. Последнее означает, что число $P_1\gamma$ находится в первой строке (P_1P_2 во второй строке наименьшее число, кратное P_1). Получается, что число $F_4 = P_1P_2P_3 = P_1N + P_1\gamma$ находится в $(P_1 + 1) -$й строке, следовательно, согласно следствию **Свойства 1**, число P_1 не критическое, и число $F_4 = P_1P_2P_3$ не проблемное.

Для $F_4 = P_1P_2P_3$ если $P_1 \to P_2 \to P_3 \to P_3$, то теоретически получается:

* Число P_1P_2 во второй строке наименьшее число, кратное P_1.

** Число P_2P_3 во второй строке наименьшее число, кратное P_2. Получаем $P_2P_3 < P_1P_2$

Запишем $P_2P_3 = N + \gamma \Rightarrow \gamma < P_2$. Умножим на P_1, получим $P_1P_2P_3 = P_1N + P_1\gamma$.

Так как $\gamma < P_2$, то число $P_1\gamma$ находится в первой строке (P_1P_2 во второй строке наименьшее число, кратное P_1). Значит, число $F_4 = P_1P_2P_3 = P_1N + P_1\gamma$ находится в $(P_1 + 1) -$ й строке, следовательно, согласно следствию **Свойства 1**, число P_1 не критическое, и число $F_4 = P_1P_2P_3$ не проблемное.

Вспомогательная лемма 3.4 доказана.

Лемма 3 доказана.

Теорема доказана.

Следствие 1. Решение 3-й проблемы Ландау (гипотеза Лежандра). Для любого натурального N между N^2 и $(N+1)^2$ найдется хотя бы одно простое число.

Очевидно, что гипотеза Лежандра является частным случаем теоремы о распределении простых чисел, и для любого натурального N между N^2 и $(N+1)^2$ найдется хотя бы два простых числа, так как в указанном интервале имеется две полных строк (минимум по одному простому числу в каждой).

Следствие 2. Гипотеза Брокарда. Для любого натурального числа n между p_n^2 и p_{n+1}^2 (где $p_n > 2$ и p_{n+1} два последовательные простые числа) найдется хотя бы четыре простых числа.

Для любого простого числа $p_n > 2$ можно записать так:

$p_n = N - 1$ и $p_n + 2 = N + 1$

Крайние числа p_n^2 и p_{n+1}^2 оба составные числа. Рассмотрим как минимум четыре полных строк в таблице. А именно между $p_n^2 = (N-1)^2$ и $(p_n+2)^2 = (N+1)^2$ имеется четыре полных строк, в каждой из которых имеется минимум по одному простому числу. Мы учитываем, что минимальная разница между последовательными (начиная с тройки) простыми числами равно 2, и поэтому выбрали $p_n = N - 1$ и $p_n + 2 = N + 1$. Значит, чем больше разница между последовательными простыми числами, тем больше простых чисел между их квадратами.

		…	$(N-2)N$
1	$(N-1)^2$	…	$(N-1)N$
2	$(N-1)N+1$	…	N^2
3	N^2+1	…	$(N+1)N$
4	$(N+1)N+1$	…	$(N+2)N$
	$(N+1)^2$	…	