Шыхалиев Л.А.
+994 50 514-95-53
logman1@list.ru

ТЕОРЕМЫ О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ

В статье «Теоремы о распределении простых чисел» рассмотрены поведения простых чисел в целях определения причин и мест их бесконечного появления. Методы решений поставленных задач по своей сложности соответствуют уровню математических знаний продвинутых старшеклассников. Но при этом обнаруженный и доказанный в статье порядок распределения простых чисел дает возможность ответить на сложнейшие вопросы теории чисел.

THEOREM ABOUT THE DISTRIBUTION OF PRIME NUMBERS

In the article "Theorems on distribution of prime numbers" there are considered the behaviors of prime numbers in order to determine the cause and location of their infinite appearance. Methods for solution of the set tasks in their complexity correspond to a level of mathematical knowledge of advanced high school students. But meanwhile the order of distribution of prime numbers, which is described and proved in this article, makes it possible to answer the most complicated issues of number theory.

Обозначения

N – любое натуральное число.
$C = \{1,2,3,...,N\}$ – множество всех чисел в первой строке.
$L = \{2,3,5,...,P_{1max}\}$ – множество всех простых чисел в первой строке.
$P_{1max} \le N$ – наибольшее простое число в первой строке.
$d_1, d_2, ..., d_{f-1} < P_{1max} \le N$ – некоторые простые числа, используемые как делители – $\{d_1, d_2, ..., d_{f-1}\} \subset L$.
Номера уровней вычеркивания соответствуют индексам простых чисел множества $S = \{s_1, s_2, ..., s_q\}$, $S = L = \{2,3,5,...,P_{1max}\}$.
Δ (так же с разными индексами, например, Δ_{ll}) – разница между количествами чисел, подлежащих вычеркиванию в произвольно взятой и первой строках «Таблицы 1» (см. пункт 1.1 «Свойства 1»).
m_{1i}, m_{ki} – объяснение в пункте 1.1. «Свойства 1».
M_{1i}, M_{ki} – объяснение в пункте 1.3. «Свойства 1».
Произвольно взятая строка – эта любая строка «Таблицы 1» кроме первой строки.
Понятию **«Увеличение»** дано объяснение в пункте 1.2. «Свойства 1».
Понятиям **«критическое число»** и **«вежливое простое число»** даны объяснения в пункте 1.5. «Свойства 1».
Понятию **«Лишнее число»** дано объяснение в «Свойстве 3».

***

Главная задача в работе состоит из доказательства «Теоремы 1». Для этого приведены множество простых утверждений и очевидных свойств. При изучении данной работы необходимо и достаточно обратить особое внимание на «Первый уровень вычеркивания» и на полный анализ неравенств (7.1) и (7.2) во «Втором уровне вычеркивания». Полное понимание неравенств (7.1) и (7.2) зависит от безошибочного понимания пунктов 1.1 и 1.3 «Свойства 1» в части поведения значений M_{1i}, M_{ki} при вычеркивании, и m_{1i}, m_{ki} при анализе уже вычеркнутых чисел. Стоит полностью понимать и обратить внимание на то, что результаты, при вычеркивании с соблюдением требований «Правила 1», постфактум не нарушаются (не меняются) при анализе поведения m_{1i}, m_{ki}.

***

***

Из множества натуральных чисел $\left[1,(N+1)^2\right]$ составим «Таблицу 1» по N чисел в каждой строке следующим образом:

Таблица 1.

$1,$	$2,$	$3,...,$	$N-1,$	N
$N+1,$	$N+2,$	$N+3,...,$	$2N-1,$	$2N$
$2N+1,$	$2N+2,$	$2N+3,...,$	$3N-1,$	$3N$
$3N+1,$	$3N+2,$	$3N+3,...,$	$4N-1,$	$4N$
...	...	...	...	...
$gN+1,$	$gN+2,$	$gN+3,..,$	$(g+1)N-1,$	$(g+1)N$
...	...	...	...	...
$(N-1)N+1,$	$(N-1)N+2,$	$(N-1)N+3,...,$	$N^2-1,$	N^2
$N^2+1,$	$N^2+2,$	$N^2+3,...,$	$N(N+1)-1,$	$N(N+1)$
$(N+1)N+1,$	$(N+1)N+2,$	$(N+1)N+3,...,$	$N(N+2)-1,$	$N(N+2)$
$(N+1)^2.$				

- Коэффициенты числа N в последней графе «Таблицы 1» соответствуют номерам строк по порядку – $1,2,3,...,(N+2)$.
- Каждая строка «Таблицы 1» является арифметической прогрессией с шагом равным единице.
- Каждая строка «Таблицы 1» является продолжением предыдущей строки.
- Согласно постулату Бертрана: для любого натурального $N \geq 2$ найдётся простое число в интервале $(N,2N)$. Поэтому в данной работе в некоторых случаях вторую строчку «Таблицы 1» на наличие в ней простых чисел не анализируем.

Теорема 1.

В каждой полной строке «Таблицы 1» в интервале $\left[1,(N+1)^2\right]$ имеется минимум одно простое число. А если $N=r_n$, то минимум одно простое число имеется в каждой полной строке таблицы в интервале $\left[1,r_{n+1}^2\right]$, где r_n и r_{n+1} – n-ое и $n+1$-ое простые числа соответственно.

Доказательство:

1. В первой и произвольно взятой строках «Таблицы 1» будем вычеркивать все числа, кратные хотя бы одному простому числу из $L=\left\{2,3,5,...,P_{1max}\right\}$
2. Повторное вычеркивание одного того же числа не допускается.
3. Вычеркивание чисел, имеющие общий простой делитель из множества $L=\left\{2,3,5,...,P_{1max}\right\}$, в первой и произвольно взятой строке «Таблицы 1» осуществляем параллельно (отдельно). При этом для каждого простого делителя сравниваем количества, вычеркнутых в первой и в произвольно

взятой строках таблицы, чисел.

Правило 1.

1.1. Вычеркивание чисел, кратных конкретно или произвольно взятому простому числу, осуществляем таким образом, что в результате в произвольно взятой строке «Таблицы 1» вычеркиваем не больше чисел, чем в первой строке таблицы, как это в качестве примера приведено в «Свойстве 5». При этом только «Лишние числа» (см. «Свойство 3») можем оставить невычеркнутыми.

1.2. «Лишние числа» вычеркиваем исключительно при вычеркивании чисел, кратных «вежливым простым числам» (см. пункт 1.5. «Свойства 1»), если это возможно без нарушения требований пункта 1.1. «Правила 1».

Предположение 1.
В результате вычеркивания всех чисел, кратных всему ряду простых чисел $2,3,5,7,...,P_{1max} \leq N$, при выполнении требований «Правила 1», в первой строке «Таблицы 1» число «1» всегда остается невычеркнутым, так как не имеет простого делителя. И значит, в произвольно взятой строке таблицы также минимум одно число останется невычеркнутым – очевидно, что это простое число.

Предположение 2.
Вычеркнув в «Таблице 1» числа, кратные $d_1, d_2, ..., d_{f-1} < P_{1max} \leq N$, мы можем столкнуться с тем, что в произвольно взятой строке при вычеркивании чисел, кратных очередному «критическому числу» d_f (см. пункт 1.5. «Свойства 1»), при соблюдения «Правила 1», не удается избавиться от «Лишнего числа» (см. «Свойство 3») $F = zd_f(M_{1d_f} + 1)$, где M_{1d_f} – количество чисел в первой строке «Таблицы 1», кратных d_f. $(M_{1d_f} + 1)$ – количество чисел в произвольно взятой строке «Таблицы 1», кратных «критическому числу» d_f.

Свойство 1.

1.1 Количество чисел m_{1i} в первой строке «Таблицы 1», кратных натуральному числу m_i, до вычеркивания определяется простым способом $m_{1i} = \left[\frac{N}{m_i} \right]$.

А в произвольно взятой строке «Таблицы 1» количество чисел m_{ki}, кратных натуральному числу m_i, до вычеркивания может иметь разные значения – возможны всего два варианта: $m_{ki} - m_{1i} = \Delta$, где $\Delta = [^0_1$. Значит, справедливо неравенство $m_{ki} \geq m_{1i}$.

1.2 Вариант $\Delta = 1$ для простых значений $m_i = P_i$ сокращенно обозначим – «Увеличение» относительно простого числа P_i.

1.3 При простых значениях $m_i = P_i$ до вычеркивания для первой строки таблицы $M_{1i} = \left[\frac{N}{P_i}\right]$, а для произвольно взятой строки $M_{ki} - M_{1i} = \Delta$, значит, справедливо неравенство $M_{ki} \geq M_{1i}$,

Где M_{ki}– количество чисел, кратных простому числу P_i, в произвольно взятой строке «Таблицы 1» до вычеркивания,

M_{1i}– количество чисел, кратных числу P_i, в первой строке «Таблицы 1» до вычеркивания.

1.4 Наибольшим числом, кратным P_i, в первой строке «Таблицы 1» является число $P_i M_{1i} = P_i \left[\frac{N}{P_i}\right]$.

1.5 Если в произвольно взятой строке таблицы имеет место $\Delta = 1$, то для данной строки простое число P_i обозначим как «критическое число». Значит, каждый член множества L для разных строк «Таблицы 1» может стать «критическим числом».

При $\Delta = 0$ простое число P_i обозначим «вежливым простым числом». Следовательно, число P_i для одной строки «Таблицы 1» может быть «критическим числом», а для другой строки той же таблицы «вежливым простым числом».

Свойство 2.

Очевидно, что, если в «Таблице 1» вычеркнуть все числа, кратные числу N, то в каждой строке таблицы вычеркнем одинаковое количество чисел – то есть по одному числу.

Свойство 3.

Рассмотрим случай, когда имеет место равенство $M_{ki} - M_{1i} = 1$, то есть $\Delta = 1$.

В произвольно взятой строке «Таблицы 1» в случае $\Delta = 1$ имеется единственное число F, которое кратно числу $P_i M_{ki} = P_i(M_{1i} + 1)$, так как из $M_{ki} = (M_{1i} + 1)$ подрядных чисел арифметической прогрессии с первым членом и шагом равным P_i одно число кратно $M_{ki} = (M_{1i} + 1)$, то есть $F = zP_i(M_{1i} + 1)$, где z– натуральное число $(z > 1)$. «Увеличение» (см. пункт 1.2. «Свойства 1») всегда происходит в пользу конкретного числа, в данном случае в пользу числа $(M_{1i} + 1)$, другими словами, количество чисел, кратных P_i, в первой строке равно M_{1i}, а в произвольно взятой строке в случае «Увеличения» равно $(M_{1i} + 1)$. Число F далее обозначим как «Лишнее число» относительно «критического числа» P_i. В одной и той же строке относительно конкретно взятого «критического числа» может быть только одно «Лишнее число», так как максимальное значение $\Delta = 1$.

Далее мы убедимся, что простые делители «Лишнего числа» (если оно существует) должны являться «критическими числами». Иначе число $F = zP_i(M_{1i} + 1)$ будет вычеркнуто при вычеркивании чисел, кратных простому делителю, которое является «вежливым простым числом».

Свойство 4.

Первые две строчки «Таблицы 1» представим в виде двух отрезков, как на «Рисунке 1». Если $z = 1$ (см. «Свойство 3»), то число $F = zP_i(M_{1i} + 1) = P_i(M_{1i} + 1)$ находится во второй строке «Таблицы 1», и является наименьшим числом, кратным P_i, во второй строке.

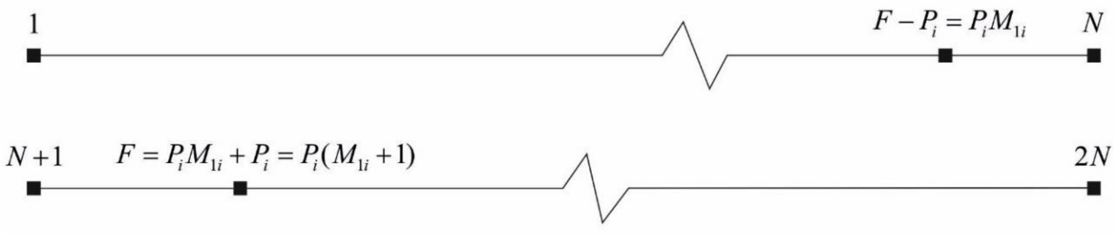

Рисунок 1

Число $F - P_i = P_i(M_{1i} + 1) - P_i = P_i M_{1i} = P_i \left[\dfrac{N}{P_i} \right]$ является наибольшим числом, кратным P_i, в первой строке «Таблицы 1».

Свойство 5.

В случае, если одно простое число при вычеркивании чисел, делителем которых оно является, в произвольно взятой строке окажется «критическим числом», то оно («критическое число») может стать не «критическим числом» в результате вычеркивания чисел, кратных другому, но не «критическому числу», в той же строке таблицы. Например, для $N = 8$ рассмотрим первые три строчки таблицы.

В «Таблице 2», если вычеркнем числа, кратные «3», то получится, что в первой строке вычеркнем два числа (3 и 6). А во второй и в третьей строках вычеркнем по три числа (9, 12, 15) и (18, 21, 24) соответственно (по одному числу больше, чем в первой строке). То есть, «Правило 1» будет соблюдено при условии, что «Лишнее число» останется невычеркнутым. Получается, что во второй и в третьей строках число «3» оказалось «критическим числом».

Таблица 2.

1	2	~~3~~	4	5	~~6~~	7	8
~~9~~	10	11	~~12~~	13	14	~~15~~	16
17	~~18~~	19	20	~~21~~	22	23	~~24~~
...	...	...	...	...	...	...	...

Чтобы снять в третей строке с «3» статус «критического числа», мы сперва вычеркнем числа («Таблица 3»), кратные «2» («вежливому простому числу»), которое в третей строке не является «критическим числом».

Таблица 3.

1	~~2~~	(~~3~~)	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~
9	~~10~~	11	~~12~~	13	~~14~~	15	~~16~~
17	~~18~~	19	~~20~~	(~~21~~)	~~22~~	23	~~24~~
...	...	...	...	...	...	...	...

Очевидно, что в первой и третьей строках остаются вычеркнуть только по одному числу, кратному «3» (это 3 – в первой строке, и 21 – в третьей строке).
А чтобы снять с «3» статус «критического числа» во второй строке мы продолжим и («Таблица 4») вычеркнем числа, кратные уже «вежливому простому числу» «5» (это 5 – в первой строке, и 15 – во второй строке), которое (то есть простое число «5») после вычеркивания четных (кратных «2») чисел уже перестало быть «критическим числом». В итоге получается, что мы в произвольно взятой строке (в данном случае во второй и в третьей строках) вычеркиваем не больше чисел, чем в первой строке.
Таблица 4.

1	~~2~~	(~~3~~)	~~4~~	~~5~~	~~6~~	(~~7~~)	~~8~~
(~~9~~)	~~10~~	11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~
17	~~18~~	19	~~20~~	(~~21~~)	~~22~~	23	~~24~~
...	...	...	...	...	...	...	...

Само «Увеличение» количества чисел (условие $M_{ki} - M_{1i} = 1$), кратных «критическому числу», всегда происходит в пользу конкретного числа. Например, в «Таблице 2» такое «Увеличение», относительно «критических чисел» «3» и «5», произошло в пользу чисел 3 (во второй и в третьей строках) и 2 (только во второй строке) соответственно. А именно, в первой строке чисел, кратных «3», было два числа (числа 3 и 6), а во второй и третьей строках их было по три (числа 9, 12, 15 и 18, 21, 24), то есть «Увеличение» чисел, кратных «критическому числу» «3», произошло в пользу числа 3. Так же в первой строке чисел, кратных «5», было одно число (число 5), а во второй строке их было два числа (числа 10 и 15), значит, «Увеличение» произошло в пользу числа 2.
Обратим внимание на то, что в «Таблице 4» при вычеркивании чисел, кратных «7», в первой строке вычеркнем одно число, а в других строчках ни одного числа не вычеркнем, так как все числа, кратные «7», уже вычеркнуты.
Свойство 6.

При любом натуральном числе k_g в $(\mathrm{k}_g\, g + 1)$-й строке «Таблицы 1» произвольно взятое простое число g является «вежливым простым числом» – то есть g не «критическое число». Другими словами, в первой и $(\mathrm{k}_g\, g + 1)$

-й строках «Таблицы 1» количество чисел, кратных g, равны. Это очевидно.

Свойство 7.

Предположим, что в некоторых строчках «Таблицы 1» имеют место «Лишние числа» и они имеют вид:

$F_1 = P_i^2(M_{1i}+1),\ F_2 = P_i(M_{1i}+1)^2,\ F_3 = P_i^{\alpha}$, где P_i и $(M_{1i}+1)$ – простые числа.

При $F_1 = P_i^2(M_{1i}+1)$ предположим, что в произвольно взятой строке произошло увеличение количества чисел, кратных P_i, в пользу $(M_{1i}+1)$, то есть $P_i \xrightarrow{\text{в пользу}} (M_{1i}+1)$. Так как все простые делители «Лишнего числа» являются «критическими числами» (далее мы в этом убедимся), то для числа $(M_{1i}+1)$ возможен только один вариант $(M_{1i}+1) \xrightarrow{\text{в пользу}} P_i$.

Запишем $P_i(M_{1i}+1) = (N+\lambda)$, далее $F_1 = P_i^2(M_{1i}+1) = P_i(N+\lambda) = P_iN + P_i\lambda$.

Так как $\lambda < P_i,\ \lambda < (M_{1i}+1)$, то получим $P_i\lambda < N$. Значит число $F_1 = P_i^2(M_{1i}+1)$ находится в (P_i+1)-й строке таблицы (получается противоречие) и число P_i «вежливое простое число» (см. «Свойство 6»), то есть число P_i не «критическое число». «Увеличение» не произошло. Для всех подвариантов вышеуказанных вариантов F_1, F_2, F_3 аналогичным путем легко доказывается, что числа F_1, F_2, F_3 не являются «Лишними числами» относительно простого числа P_i.

Первый уровень вычеркивания:

Возьмем любые два простые числа $\{s_1, s_2\} \subset L$. Вычеркнем (при этом соблюдаем «Правило 1») в «Таблице 1» все числа, кратные s_1 (обозначим как «вычеркивание первого уровня»), и рассмотрим количество оставшихся чисел в первой $n_{1s_1} = n_1(s_1) = 0$ (до вычеркивания было $M_{1s_1} = M_1(s_1)$) и произвольно взятой $n_{ks_1} = n_k(s_1) = 0 + \Delta_{11}$ (до вычеркивания было $M_{ks_1} = M_k(s_1) + \Delta_{11}$) строках, кратных простому числу s_1. При вычеркивании чисел, кратных s_1, в произвольно взятой строке были вычеркнуты все числа (в случае их наличия), кратные s_1s_2, – их количество пусть $\partial_{ks_1s_2} = \partial_k(s_1s_2)$. Параллельно были вычеркнуты все числа в первой строке, кратные (в случае их наличия) s_1s_2, – пусть их количество $\partial_{1s_1s_2} = \partial_1(s_1s_2)$. Другими словами, чисел, кратных s_2, было $M_{1s_2} = M_1(s_2)$ и $M_{ks_2} = M_k(s_2)$, вычеркнуто $\partial_{1s_1s_2} = \partial_1(s_1s_2)$ и $\partial_{ks_1s_2} = \partial_k(s_1s_2)$, осталось $n_{1s_2} = n_1(s_2)$ и $n_{ks_2} = n_k(s_2)$, в первой и произвольно взятой строках «Таблицы 1» соответственно.

То есть, $n_{1s_2} = M_{1s_2} - \partial_{1s_1s_2}$ и $n_{ks_2} = M_{ks_2} - \partial_{ks_1s_2}$. **(1)**

С учетом пункта 1.1. «Свойства 1» (где $m_{ki} \geq m_{1i}$) запишем

$\partial_k(s_1s_2) \geq \partial_1(s_1s_2)$. **(2)**

С учетом пункта 1.2. «Свойства 1» запишем $M_{ks_2} = M_{1s_2} + \Delta_{21}$. **(3)**

Если из (3) вычесть (2), то получим

$M_{ks_2} - \partial_k(s_1 s_2) \le M_{1s_2} - \partial_1(s_1 s_2) + \Delta_{22}$. **(4)**

С учетом (1) и (4) получим

$n_{ks_2} \le n_{1s_2} + \Delta_{22}$ **(5)**

До начала «Первого уровня вычеркивания» состояние «Таблицы 1» могли записать одним выражением $M_{ki} - M_{1i} = \Delta = [^0_1$. А после «Первого уровня вычеркивания», из-за произвольности чисел $\{s_1, s_2\} \subset L$, состояние «Таблицы 1» можно записать в виде следующей системы выражений.

$n_{ks_1} = n_{1s_1} + \Delta_{11} = 0 + \Delta_{12}$ (где $\Delta_{11} = \Delta_{12}$, $n_{1s_1} = 0$). **(6.1)**

$n_{ks_2} \le n_{1s_2} + \Delta_{22}$ **(6.2)**

$n_{ks_3} \le n_{1s_3} + \Delta_{32}$ **(6.3)**

$n_{ks_4} \le n_{1s_4} + \Delta_{42}$ **(6.4)**

…

$n_{ks_q} \le n_{1s_q} + \Delta_{q2}$ **(6.q)**

Напомню, что в таблице вычеркнуты все числа, кратные s_1, за исключением возможного «Лишнего числа», если имеет место $\Delta_{11} = 1$.

P.S. *Если вычеркнуть в «Таблице 1» все числа, которые имеют хотя бы один простой делитель во множестве* $L = \{2,3,5,...,P_{1max}\}$, *то независимо от порядка и последовательности вычеркивания результат для конкретно взятого значения* N *всегда будет один и тот же. А это в совокупности с результатом первого уровня вычеркивания, благодаря произвольности чисел* $\{s_1, s_2\} \subset L$, *дает предположить, что в произвольно взятой строке таблицы будут вычеркнуты не больше чисел, чем в первой строке таблицы, не учитывая поведения возможных «Лишних чисел».*

Второй уровень вычеркивания:

Теперь вычеркнем в таблице оставшиеся числа, кратные s_2 (соблюдаем «Правило 1»). В результате такого вычеркивания чисел, кратных s_2 с учетом неравенства (6.2) видно, что в произвольно взятой строке мы вычеркнем не больше чисел, чем в первой строке «Таблицы 1». При вычеркивании чисел, кратных s_2, мы вычеркиваем числа, кратные составному числу $s_2 s_3$, в количестве $\partial_{1s_2s_3} = \partial_1(s_2 s_3)$ и $\partial_{ks_2s_3} = \partial_k(s_2 s_3)$ в первой и произвольно взятой строках соответственно. Поведение неравенства (6.3) зависит от значений $\partial_{1s_2s_3} = \partial_1(s_2 s_3)$ и $\partial_{ks_2s_3} = \partial_k(s_2 s_3)$.

Возможны два варианта

$\partial_{ks_2s_3} \ge \partial_{1s_2s_3}$ **(7.1)**

$\partial_{ks_2s_3} < \partial_{1s_2s_3}$ **(7.2)**

После вычеркивания чисел, кратных s_2, количества оставшихся невычеркнутыми чисел, кратных s_3, будут $w_{1s_3} = n_{1s_3} - \partial_{1s_2s_3} + \Delta_{33}$ и

$w_{ks_3} = n_{ks_3} - \partial_{ks_2 s_3}$ в первой и произвольно взятой строках соответственно. Если из (6.3) вычесть (7.1), то получим $n_{ks_3} - \partial_{ks_2 s_3} \le n_{1s_3} - \partial_{1s_2 s_3} + \Delta_{33}$, то есть $w_{ks_3} \le w_{1s_3} + \Delta_{33}$ **(8)**

Теперь рассмотрим вариант (7.2). Количество вычеркнутых чисел, кратных $s_1 s_3$, на первом уровне вычеркивания обозначим $\partial_{1s_1 s_3} = \partial_1(s_1 s_3)$ и $\partial_{ks_1 s_3} = \partial_k(s_1 s_3)$ в первой и произвольно взятой строках соответственно.

С учетом пункта 1.1. «Свойства 1» неравенство (7.2) возможно, если $\partial_{ks_1 s_3} > \partial_{1s_1 s_3}$, $\partial_{ks_1 s_3} - \partial_{1s_1 s_3} = \delta$, где $\delta \ge 1$, и в таком случае неравенство (6.3) следовало бы записать так

$$n_{ks_3} + \delta \le n_{1s_3} + \Delta_{32}. \quad \textbf{(9)}$$

А неравенство (7.2) так:

$$\partial_{ks_2 s_3} + \delta \ge \partial_{1s_2 s_3} \quad \textbf{(10)}$$

Далее, если из (9) вычесть (10), то получим $n_{ks_3} - \partial_{ks_2 s_3} \le n_{1s_3} - \partial_{1s_2 s_3} + \Delta_{33}$, то есть $w_{ks_3} \le w_{1s_3} + \Delta_{33}$. **(11)**

Получается, что в обоих случаях (7.1) и (7.2) пришли к одному тому же результату – (8), (11).

Из-за произвольности s_3 неравенство (8) будет справедливо для всех чисел $\left\{s_4, s_5, ..., s_q\right\}$, и после «Второго уровня зачеркивания» состояние «Таблицы 1» будет выглядеть следующим образом

$$n_{ks_1} = n_{1s_1} + \Delta_{13} = 0 + \Delta_{13} \qquad (\text{где } n_{1s_1} = 0) \quad \textbf{(12.1)}$$

$$w_{ks_2} \le w_{1s_2} + \Delta_{23} = 0 + \Delta_{23} \qquad (\text{где } w_{1s_2} = 0) \quad \textbf{(12.2)}$$

$$w_{ks_3} \le w_{1s_3} + \Delta_{33} \quad \textbf{(12.3)}$$

$$w_{ks_4} \le w_{1s_4} + \Delta_{43} \quad \textbf{(12.4)}$$

…

$$w_{ks_q} \le w_{1s_q} + \Delta_{q3} \quad \textbf{(12.q)}$$

Аналогичным путем доходим до q-го уровня вычеркивания. В итоге в первой строке останется невычеркнутым число «1». Соблюдая «Правило 1» в произвольно взятой строке вычеркнули не больше чисел, чем в первой строке «Таблицы 1». Поэтому в произвольно взятой строке, как минимум, одно число осталось невычеркнутым. Точное значение $\sum_1^q \Delta_{i(q+1)}$ нам не известно

$$\sum_1^q \Delta_{i(q+1)} = \Delta_{1(q+1)} + \Delta_{2(q+1)} + \Delta_{3(q+1)} + ... + \Delta_{q(q+1)}. \quad \textbf{(13)}$$

Значения $\Delta_{разные}$ после каждого уровня вычеркивания могут измениться, так как «Лишние числа» могут быть вычеркнутыми за счет вычеркивания чисел, кратных «вежливым простым числам». При этом $\Delta_{i(d-1)} = [^0_1$,

$\Delta_{id} \le \Delta_{i(d-1)}$, где d – произвольный номер уровня вычеркивания, i – индекс соответствующего простого числа из множества $S = \{s_1, s_2, ..., s_q\}$, относительно которого анализировали наличие/отсутствие «Увеличение».

Сумма (13) могла формироваться только из количества «Лишних чисел» (см. «Свойство 3»). Предположим, что $F = zP_i(M_{1i}+1)$, $z > 1$, произвольно взятое «Лишнее число», которое до q-го уровня включительно осталось невычеркнутым. В процессе с первого по q-го уровней вычеркивания в «Таблице 1» мы вычеркнули все числа, которые кратные «вежливым простым числам». Если бы число $F = zP_i(M_{1i}+1)$ имело или в процессе вычеркивания «приобрело» собственного делителя в виде «вежливого простого числа», то оно – число $F = zP_i(M_{1i}+1)$ – было бы вычеркнуто за счет вычеркивания чисел кратных собственному простому делителю, которое, или изначально был «вежливым простым числом», или же в процессе некоторого уровня вычеркивания стало «вежливым простым числом». А если число $F = zP_i(M_{1i}+1)$ не вычеркнуто, то очевидно, что все его простые делители были «критическими числами». Учитывая, что в произвольно взятой строке относительно «критического числа» P_i может быть только одно «Лишнее число» (см. «Свойство 3»), то все числа, которые могли остаться невычеркнутыми в произвольно взятой строке таблицы, могут быть только взаимно простыми числами.

В «Свойстве 7» мы рассмотрели три варианта для F_1, F_2, F_3. Ниже докажем, что во всех остальных вариантах, при $z \ne P_i$, $z \ne (M_{1i}+1)$, $P_i \ne (M_{1i}+1)$, в произвольно взятой строке «Таблицы 1» в пределах $\left[1, (N+1)^2 - 1\right]$ не осталось ни одного невычеркнутого «Лишнего числа».

$P_i \xrightarrow{\text{в пользу}} (M_{1i}+1)$ – подобные условные знаки обозначают, что в произвольно взятой строке «Таблицы 1» произошло «Увеличение» количества чисел, кратных числу P_i, в пользу числа $(M_{1i}+1)$. Другими словами, их количество в первой строке таблицы равно M_{1i}, а в произвольно взятой строке $(M_{1i}+1)$.

Вариант 1.0.0.

$F = zP_i(M_{1i}+1)$.

$(M_{1i}+1)$ и z – простые числа

Подвариант 1.1.1.

$$P_i \xrightarrow{\text{в пользу}} (M_{1i}+1) \qquad \textbf{(14)}$$

$$(M_{1i}+1) \xrightarrow{\text{в пользу}} P_i \qquad \textbf{(15)}$$

$$z \xrightarrow{\text{в пользу}} P_i. \qquad \textbf{(16)}$$

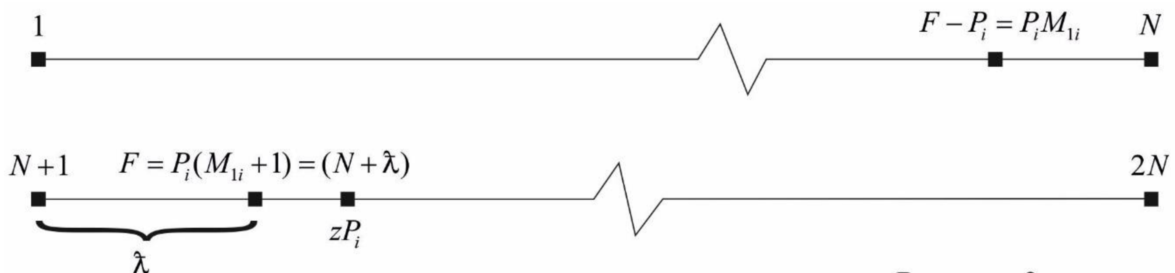

Рисунок 2

Запишем так (см. «Рисунок 2» с учетом «Свойства 4»):
$zP_i > P_i(M_{1i}+1)$, так как по причине (14) в промежутке $\left[(N+1), P_i(M_{1i}+1)\right)$ не может находиться число zP_i (так как кратно P_i). Так же по причине (16) в промежутке $\left[(N+1), zP_i\right)$ нет чисел, кратных z.
Следовательно, $P_i(M_{1i}+1)=(N+\lambda)$, где $\lambda < P_i$.
$F = zP_i(M_{1i}+1) = z(N+\lambda) = zN + z\lambda$, $z\lambda < N$
Значит, число $F = zP_i(M_{1i}+1) = zN + z\lambda$ находится в $(z+1)$-й строке таблицы. А в $(z+1)$-й строке число $z-$ не «критическое число» (см. «Свойство 6»), что противоречит условию (16). Значит, в «Таблице 1» нет числа $F = zP_i(M_{1i}+1)$ с параметрами «Подварианта 1.1.1.»

Подвариант 1.1.2.

$$P_i \xrightarrow{\text{в пользу}} (M_{1i}+1)$$

$$(M_{1i}+1) \xrightarrow{\text{в пользу}} P_i \qquad \textbf{(17)}$$

$$z \xrightarrow{\text{в пользу}} (M_{1i}+1) \qquad \textbf{(18)}$$

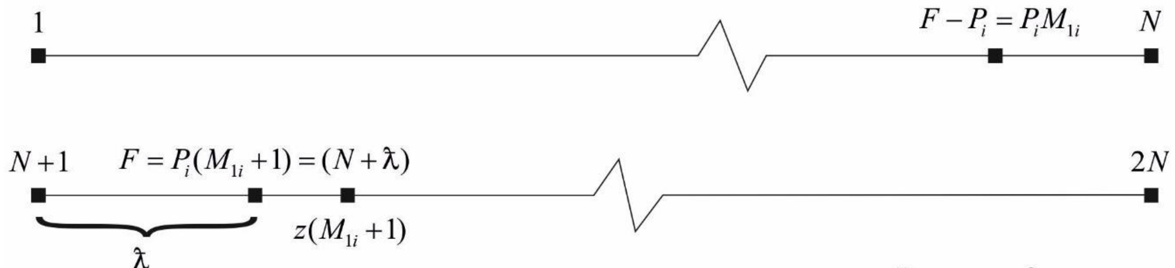

Рисунок 3

Данный «Подвариант 1.1.2.» анализируем по аналогии «Подварианта 1.1.1.», только добавим, что по причине (17) в промежутке $\left[(N+1), P_i(M_{1i}+1)\right)$ нет чисел, кратных $(M_{1i}+1)$. Получаем противоречие условию (18). В «Таблице 1» нет числа $F = zP_i(M_{1i}+1)$ с параметрами «Подварианта 1.1.2.»

Подвариант 1.2.1.

$$P_i \xrightarrow{\text{в пользу}} (M_{1i}+1)$$

$$(M_{1i}+1) \xrightarrow{\text{в пользу}} z \qquad \textbf{(19)}$$

$$z \xrightarrow{\text{в пользу}} P_i \qquad \textbf{(20)}$$

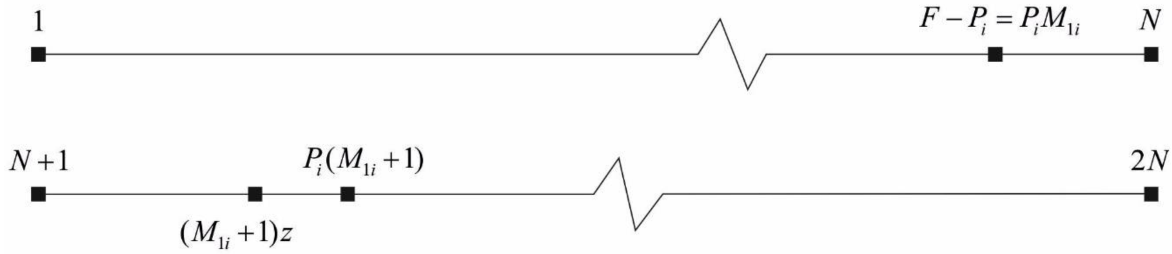

Рисунок 4

По причине (19) число $P_i(M_{1i}+1)$, которое кратно $(M_{1i}+1)$, не может находиться (см. «Рисунок 4») в промежутке $\left[(N+1),(M_{1i}+1)z\right)$. Поэтому $(M_{1i}+1)z < P_i(M_{1i}+1)$. Кроме того, в промежутке $\left[(N+1),P_i(M_{1i}+1)\right)$ не может находиться число, кратное P_i (то есть число zP_i по условиям (20)), а в промежутке $\left[(N+1),zP_i\right)$ не может находиться число кратное z (то есть число $(M_{1i}+1)z$ по условиям (19)). В результате во второй строке числу zP_i мест нет. Значит, в «Таблице 1» нет числа $F = zP_i(M_{1i}+1)$ с параметрами «Подварианта 1.2.1.»

Подвариант 1.2.2.

$$P_i \xrightarrow{\text{в пользу}} (M_{1i}+1) \tag{21}$$

$$(M_{1i}+1) \xrightarrow{\text{в пользу}} z \tag{22}$$

$$z \xrightarrow{\text{в пользу}} (M_{1i}+1) \tag{23}$$

По причине (22) имеем $(M_{1i}+1)z = (N+\lambda)$, где $\lambda < (M_{1i}+1)$, по причине (21) получим $F = zP_i(M_{1i}+1) = z(N+\lambda) = zN + z\lambda$, где $z\lambda < N$.

Получается, что по аналогии «Подварианта 1.1.1.» число $F = zP_i(M_{1i}+1) = zN + z\lambda$ находится в $(z+1)$-й строке таблицы. А в $(z+1)$-й строке число z не «критическое число» (см. «Свойство 6»), что противоречит условию (23). Значит, в «Таблице 1» нет числа $F = zP_i(M_{1i}+1)$ с параметрами «Подварианта 1.2.2.»

Вариант 2.0.

$(M_{1i}+1) = tdc$, где t,d – простые числа, c – натуральное число,

$z = abf$, где a,b – простые числа, f – натуральное число.

$F = abfP_i tdc$.

Подвариант 2.1.

$$P_i \xrightarrow{\text{в пользу}} (M_{1i}+1)$$

$$t \xrightarrow{\text{в пользу}} a \tag{24}$$

$$d \xrightarrow{\text{в пользу}} b \tag{25}$$

$$a \xrightarrow{\text{в пользу}} d$$

$$b \xrightarrow{\text{в пользу}} t$$

По причинам (24) и (25) $ta > N$, $bd > N$ соответственно. Значит, $tabd > N^2$, далее $F = abfP_i tdc > N^2$. Значит, в «Таблице 1» нет числа $F = zP_i(M_{1i}+1)$, соответствующего «Подварианту 2.1.». Для всех остальных возможных подвариантов «Варианта 2» аналогичным путем легко доказывается, что в «Таблице 1» нет числа $F = zP_i(M_{1i}+1)$ с параметрами «Варианта 2».

Вариант 3.0.

$(M_{1i}+1)$ – простое число,

$z = abf$, где a, b – простые числа, f – натуральное число.

$F = abfP_i(M_{1i}+1)$.

Подвариант 3.1.

$$P_i \xrightarrow{\text{в пользу}} (M_{1i}+1) \quad \textbf{(26)}$$

$$a \xrightarrow{\text{в пользу}} (M_{1i}+1) \quad \textbf{(27)}$$

$$b \xrightarrow{\text{в пользу}} (M_{1i}+1) \quad \textbf{(28)}$$

$b \neq a,\ b > a$.

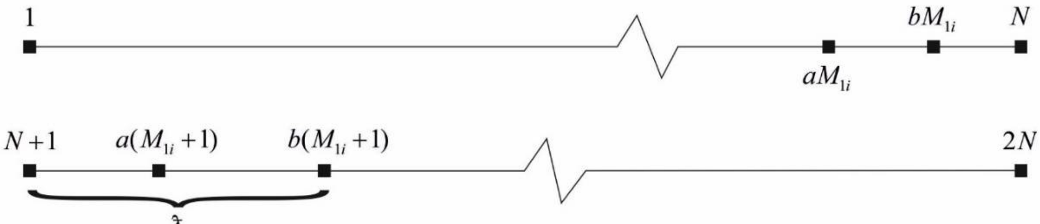

Рисунок 5

По причинам (26), (27), (28) имеем (см. «Рисунок» 5»)

$P_i(M_{1i}+1) \geq N+\lambda,\ a(M_{1i}+1) \geq N+1,\ b(M_{1i}+1) = N+\lambda$

соответственно. Умножив последние три неравенства получим

$$abP_i(M_{1i}+1)^3 \geq (N+\lambda)^2(N+1),\ abP_i(M_{1i}+1) \geq \frac{(N+\lambda)^2(N+1)}{(M_{1i}+1)^2} \quad \textbf{(29)}$$

$b > \lambda > b(M_{1i}+1) - a(M_{1i}+1) = (M_{1i}+1)(b-a) \geq 2(M_{1i}+1)$, получим

$b > 2(M_{1i}+1)$, $(M_{1i}+1) < \dfrac{b}{2}$, умножим на $(M_{1i}+1)$, получим

$(M_{1i}+1)^2 < \dfrac{b(M_{1i}+1)}{2} = \dfrac{(N+\lambda)}{2}$, с учетом (29) получим

$abP_i(M_{1i}+1) > 2(N+1)(N+\lambda) > 2(N+1)^2$.

Значит, в «Таблице 1» нет числа $F = zP_i(M_{1i}+1) = abfP_i(M_{1i}+1)$, другими словами, число $F = zP_i(M_{1i}+1)$ находится за пределами интервала $\left[1, 2(N+1)^2\right]$.

Подвариант 3.2.

$$P_i \xrightarrow{\text{в пользу}} (M_{1i}+1)$$

$$a \xrightarrow{\text{в пользу}} (M_{1i}+1) \quad \textbf{(30)}$$

$$b \xrightarrow{\text{в пользу}} P_i \quad \textbf{(31)}$$

По аналогии «Подварианта 3.1.» определяется, что в «Таблице 1» нет числа $F = zP_i(M_{1i}+1) = abfP_i(M_{1i}+1)$, другими словами, число $F = zP_i(M_{1i}+1)$ находится за пределами интервала $\left[1, 2(N+1)^2\right]$.

Вариант 4.

$(M_{1i}+1)=td$,

z – простое число.

$F=zP_itd$.

Подвариант 4.1.

$P_i \xrightarrow{\text{в пользу}} (M_{1i}+1)=td$ **(32)**

$t \xrightarrow{\text{в пользу}} z$ **(33)**

$d \xrightarrow{\text{в пользу}} z$ **(34)**

$d>t$.

По причине (33) и (34) в промежутках $\left[(N+1),tz\right)$ и $\left[(N+1),dz\right)$ не может находиться число P_itd, которое кратно числам t и d соответственно.

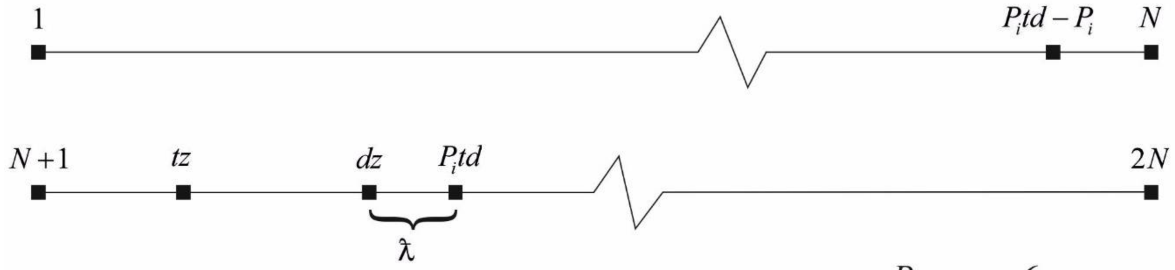

Рисунок 6

Поэтому $tz<dz<P_itd$. По такой же причине имеет место $z \xrightarrow{\text{в пользу}} t$. В промежутке $\left[(N+1),P_itd\right)$ не имеется ни одного числа, кратного P_i, а имеется несколько чисел, кратные z. Поэтому $P_i>z$. Так же в промежутке $\left[(N+1),dz\right)$ нет ни одного числа, кратного d. Поэтому $d>z$. Запишем

$P_i>z,\ P_it>zt,\ P_it-z>zt-z=z(t-1)$, $(t-1)>1$ **(35)**

С учетом (35) $\lambda=P_itd-dz=d(P_it-z)>dz(t-1)>dz>N$

Получается $\lambda>N$, а должно было быть $\lambda<N$ (см. «Рисунок 6»). Значит, в «Таблице 1» нет числа $F=zP_itd$ с параметрами «Подварианта 4.1.».

Подвариант 4.2.

$P_i \xrightarrow{\text{в пользу}} (M_{1i}+1)=td$

$t \xrightarrow{\text{в пользу}} z$

$d \xrightarrow{\text{в пользу}} z$

$z \xrightarrow{\text{в пользу}} P_i$

$d>t$.

В данном варианте для числа zP во второй строке место не определяется по аналогии «Подварианта 1.2.1.».

Вариант 5.0.

$(M_{1i}+1)=tdc$,

z простое число.

$F=zP_itdc$.

В данном случае увеличивается количество простых делителей. По аналогии «Варианта 4» приходим к тому, что в «Таблице 1» нет числа

$F = zP_i tdc$ с параметрами «Варианта 5».

Заключение 1. В произвольно взятой строке таблицы остается минимум одно число, которое не имеет простого делителя во множестве $L=\{2,3,5,...,P_{1max}\}$. А все числа в интервале $\left[1,(N+1)^2\right]$, не имеющие простого делителя во множестве $L=\{2,3,5,...,P_{1max}\}$, являются простыми числами. Значит, в каждой строке «Таблицы 1» имеется минимум одно простое число.

Заключение 2. В случае, если $N = r_n$ простое число, то в любой полной строке таблицы в интервале $\left[1, r_{n+1}^2\right]$ имеется минимум одно простое число, где r_n и r_{n+1} – n-ое и $n+1$-ое простые числа соответственно.

«Теорема 1» – **Теорема Шыхалиева** – доказана.

Теорема 2 (гипотеза Брокарда). Для любого натурального числа n между p_n^2 и p_{n+1}^2, найдется хотя бы четыре простых числа, где p_n и p_{n+1} – n-ое и $n+1$-ое простые числа соответственно, $p_n > 2$.

Доказательство.

Используем «Теорему 1» при $N = p_n$. С учетом $p_{n+1} \geq (p_n + 2)$ между числами p_n^2 и $(p_{n+1}^2 - 1)$ имеются минимум четыре полные строки (см. «Таблица 1»), т.е. $(p_{n+1}^2 - 1) - p_n^2 \geq [(p_n + 2)^2 - 1] - p_n^2 = 4p_n + 3 > 4p_n$.

В исследуемом интервале имеем 4 полные строки (и неполную строку, в которой находится число p_{n+1}^2), так как за нижнюю границу берем $p_n^2 + 1$, что является первым числом строки под номером $p_n + 1$ (с учетом $N = p_n$).

Согласно «Теоремы 1» в каждой такой строке таблицы имеется минимум одно простое число. Значит, между p_n^2 и p_{n+1}^2 имеются минимум четыре простые числа.

«Теорема 2» доказана.

Теорема 3. Для любого натурального числа N между N^2 и $(N+1)^2$ найдется хотя бы два простых числа.

Доказательство.

$$(N+1)^2 - N^2 = 2N + 1$$

По значению полученной разницы $2N+1$ видно, что между числами N^2 и $(N+1)^2$ в «Таблице 1» всегда имеются две полные строки. А в каждой такой строке «Таблицы 1» согласно «Теоремы 1» имеется минимум одно простое число.

«Теорема 3» доказана. Так же решена **3-я проблема Ландау (Гипотеза Лежандра)**, как частный случай «Теоремы 3».